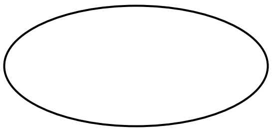
方程式を使わない楕円・双曲線の説明

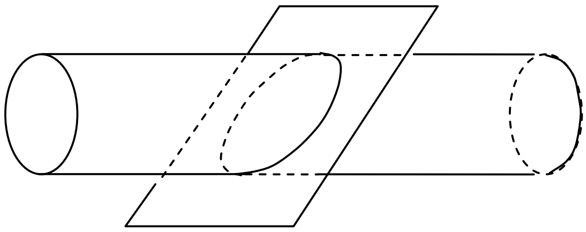
１．楕円

楕円とは、円を押しつぶしたような下図のような形である。日常生活の中でも、

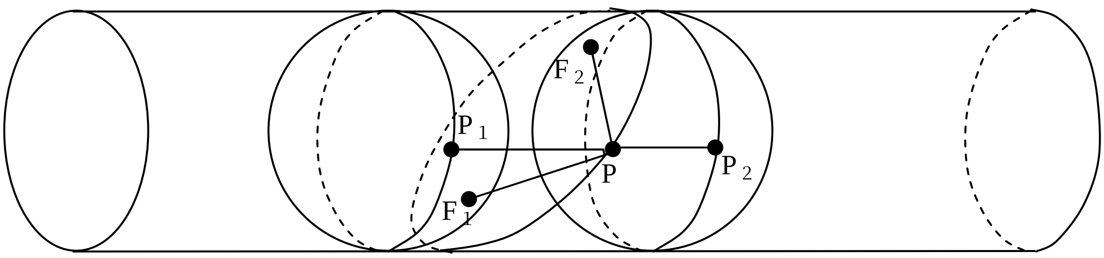


① 長ねぎ等の根菜や、竹をななめに切った時の切り口、
② コップに入った水を少し傾けた時の水面、
③ ボールが太陽光やスポットライトで照らされた時の影、
④ 懐中電灯で地面を照らした時の明るい部分
⑤ 平面上の円を斜め方向から眺めた時

といろんな場面で出会う身近な曲線である。それだけに紀元前の昔からよく調べられていて、いろいろな特徴づけがなされている。そのうち最も重要といってよいのが、焦点の存在である。すなわち楕円の内部には焦点と呼ばれる２つの点があり、それらから楕円の周上の点までの距離の和が一定になっているのである。そのことを例①の円柱の平面での切り口で示してみよう。



この円柱に内接する２つの球 B_1 と B_2 をこの平面の左右から入れて、平面に接するまで押し込むとそれぞれの球が下図のように切り口の内部にある点 F_1 と F_2 で接するとしてよい。



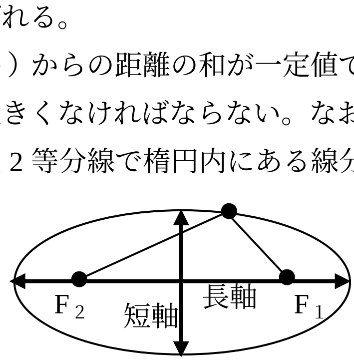
切り口上の勝手な点を P とし、球 B_1 と B_2 と円柱が接する円と点 P を通る母線との交点を P_1 と P_2 とすれば、球外の一点から球に引いた 2 つの接線の長さは等しいので、線分 PF_1 と PF_2 の長さの和を考えると

$PF_1 + PF_2 = PP_1 + PP_2 = P_1P_2 =$（球 B_1 と B_2 の接する２円の間隔で一定）

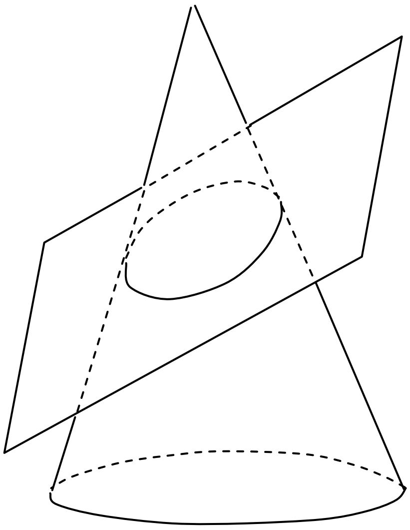
が示せる。

この性質を持つ図形が楕円と呼ばれる。

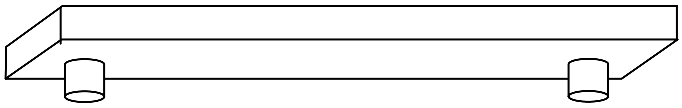
$\boxed{\text{定義}}$ 2 定点（焦点= focus という）からの距離の和が一定値である点が描く図形を楕円という。もちろんその一定値は焦点の間隔より大きくなければならない。なお、2 焦点を結ぶ線分を楕円と交わるまで延長した線分を長軸、長軸の垂直 2 等分線で楕円内にある線分を短軸という。



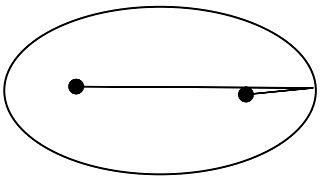
円柱を平面で切断した際の議論は円錐を平面で切った時に現れる切断面にも通用でき、例②から④もすべて上の楕円の定義を満たす事がわかる（ダンデリンの定理。円錐に内接する球で平面にも接するものを 2 つ考え、切り口上の点から平面との 2 接点までの距離が、切り口上の点から 2 球の内接している円までの距離に等しいことを使う。長軸の長さは 2 球の内接している 2 円の円錐内での間隔に等しい)。



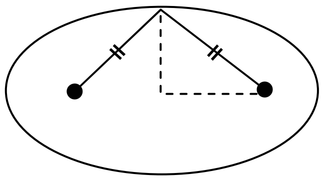
楕円を定義に従って描くのは易しく、紐の両端を２焦点の位置に固定し、紐がピンと張るようにして鉛筆やチョークを動かせばよい。例えば地面に正確に描くには、焦点の上に円柱状の２本の杭を打ち、紐の両端にその杭が入るような輪を作り、紐を引っ掛けてピンと引っ張った時の点の位置を記録すればよい。黒板の上のような所でも、角材の両端に短い円柱を接着した下図のような道具を作れば、紐の輪を円柱に引っ掛けた状態で片手で角材を固定し、残る片手で紐をピンと張れば同様に楕円が描ける。



楕円の形は、長軸の長さと短軸の長さで決まるが、上の構成法からは２焦点の間隔と紐の長さで決まるともいえる。両者の関係は、下の楕円上の点が 2 焦点を結び延長してできる軸(長軸)上にある場合と, 短軸上にある場合の, 下図で示された 2 つの場合を考えると、次の(i)と(ii)で表されることが良くわかる。



長軸上にある場合



短軸上にある場合

(i)　長軸の長さ＝紐の長さ　（楕円は描き方から左右対称なので、長軸上の紐が２重の部分は紐の通ってない部分と長さが等しい。よって 2 重の部分は 0 重の部分に移植可能）

(ii)　焦点の１つ，中心，短軸の端点の 3 点は，斜辺が紐の長さの半分である直角三角形をなす

なお、座標平面での楕円の標準形である $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ では、長軸と短軸は、座標軸に重なっていてそれらの長さである 2a と 2b のいずれかであり、2 焦点の間隔には記号 2c が使用されるので、性質(ii)を表す等式は $a^2 = b^2 + c^2$ と $b^2 = a^2 + c^2$ のいずれかで表される。

そして、2 定点がなぜ焦点と呼ばれるかは、一つの焦点から出発した光が楕円で反射されるともう一つの焦点へと向うという次の性質によっている。

定理　焦点 F_1 と F_2 を持つ楕円上の任意の点 P に対し、線分 PF_1 と PF_2 のそれぞれが P での接線と

なす角は等しい。

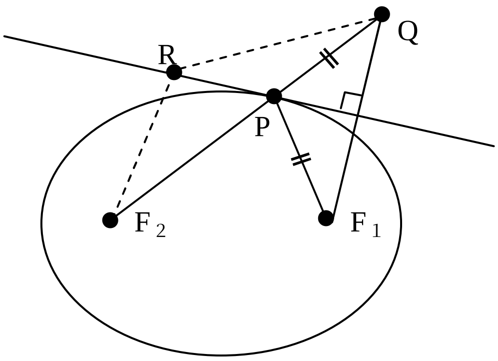
証明　焦点 F_2から点 P の方向へ、楕円の長軸の長さだけ離れた点を Q とする。F_1Q の垂直 2 等分線が点 P での接線でもある事が次のように示せる。まず、

$$PF_2 + PF_1 = （長軸の長さ）= F_2Q = PF_2 + PQ$$

なので PF_1=PQ であるから、F_1Q の垂直 2 等分線は点 P を通る。そして、点 P 以外のその上の任意の点 R に対しては、

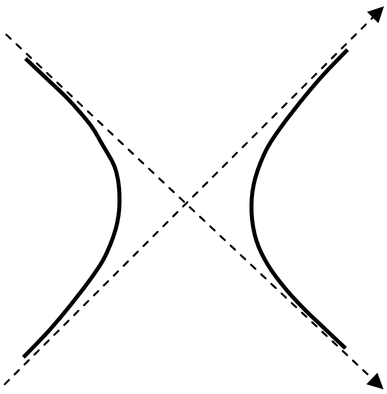
$$RF_2 + RF_1 = RF_2 + RQ > F_2Q = （長軸の長さ）$$

なので点 R が楕円の定義を満たさず（外部にある)、F_1Q の垂直 2 等分線は 1 点 P でのみ楕円と共有点を持つからである。従って F_1Q での垂直 2 等分線でもある点 P での接線は、角 QP F_1を 2 等分し、線分 PF_1と PF_2のそれぞれと等しい角をなすことがわかる。



例⑤の円を斜めから見た時に楕円に見える事は、斜円錐(平面内の円の中心の真上にない平面外の 1 点と円周上の各点を結んで出来る曲面)を斜めに切っても楕円が現れる事と対応するが､座標や方程式を使わないと説明が困難なのでここでは触れない。

2.双曲線



双曲線は、直角双曲線といわれる反比例のグラフ（y ＝ a/x　a は正の定数）を一つの例とする、次のような形の曲線である。ただし、見やすくするためグラフを 45 度時計回りに回転し、座標軸を破線で表した。

中心に対し点対称な 2 つの無限に伸びた曲線よりなり、中心から離れるほど 2 つの直線（x 軸、y 軸）に限りなく近づいて行く性質を持つ。その合同な 2 つの曲線のうちの片方だけでも双曲線という（漢字の意味からすると変であるが)。すると、楕円ほどではないが日常生活でも次のような場面で遭遇している。

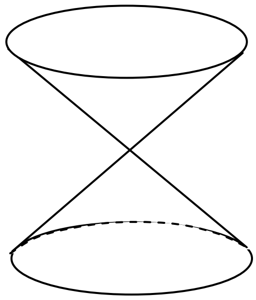
① （角柱状の）鉛筆の芯を削った時に現れる木の部分と塗装面との境界線

② 　カクテルグラス（円錐状のコップ）を約 90 度傾けて水に漬けたときの容器と水面との境界

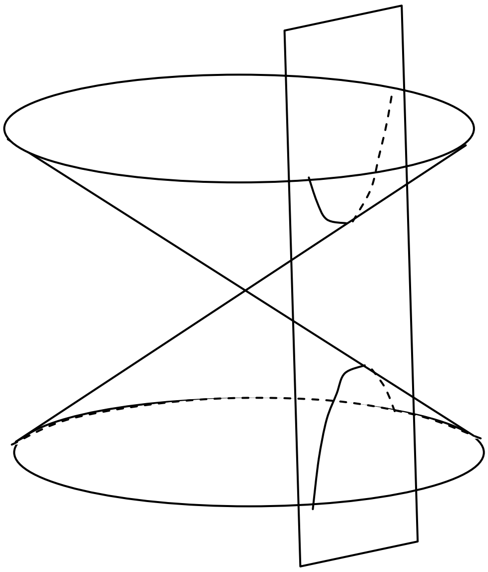
③ 　懐中電灯をほぼ水平にし照らした時の地面の明るい部分の境界線

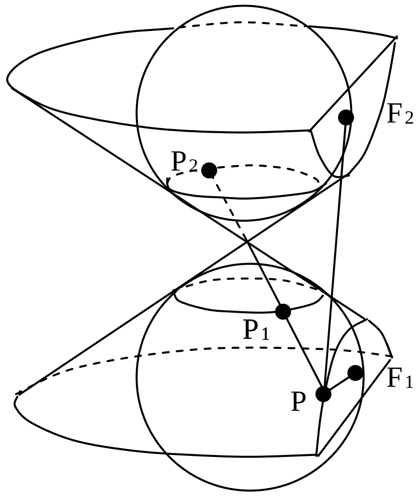
④ 　地面に垂直に建てられた塔の先端部分の、太陽による地面への影が 1 日になす曲線

①から③は、楕円と同様にいずれもが円錐を平面で切った時に現れる曲線である。④も、塔の先端を通る太陽光線が作る曲面が、頂点を塔の先端とし、底円を天球面上の太陽の軌跡（天の北極の方向に垂直な円）とする双円錐の一部分である事からわかる。ここで、双円錐とは、普通の円錐の母線を頂点の上に延長させてできる下図のような図形である（単に円錐という人が数学では多いが区別した)。



この双円錐を、上下の円錐と交わりかつ頂点を通らないような平面で、切断して生ずる曲線が双曲線である。例①のように平面が双円錐の中心軸に平行であればもちろん双曲線になるが、平面と中心軸のなす角が頂角の半分より小さければよい(大きいと片方の円錐としか交わらず楕円が現れる)。





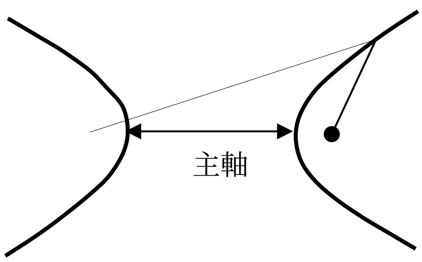
双曲線でも楕円の場合と同様に、双円錐の上下の円錐にそれぞれ内接し平面にも接するような球を 2 つ考え、B_1 と B_2 とし、それらの平面との接点を F_1 と F_2 とする。切り口上の任意の点 P に対し、P を通る母線と B_1 と B_2 の接円との交点を P_1 と P_2 とすると、

$$|PF_2-PF_1|=|PP_2-PP_1|=P_1P_2=（球 B_1 と B_2 の接円の双円錐内での間隔で一定）$$

が成り立つ(上図でもし点 P が上の方の切り口上にあると $PF_2-PF_1=PP_2-PP_1$ は負になるので絶対値記号が必要)。

それでこの特徴で双曲線を定義する。

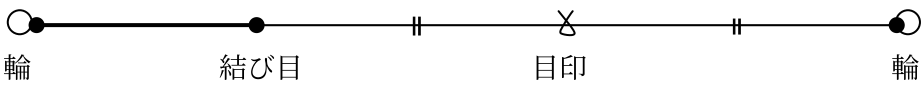
$\boxed{\text{定義}}$　2 定点 F_1, F_2（焦点= focus という）からの距離の差が一定値である点が描く図形を双曲線という。ただしその一定値は焦点の間隔未満でなければならない。というのは、3 点 P と F_1, F_2を結んで 3 角形が生じるためには三角不等式より $|PF_2-PF_1|<F_1F_2$ が必要だからである。なお、2 焦点を結ぶ線分が双曲線と交わる 2 点を結んだ線分を主軸という。



楕円には長軸と短軸という形を決める 2 つの量があったのに、双曲線には一見主軸という一つの量し

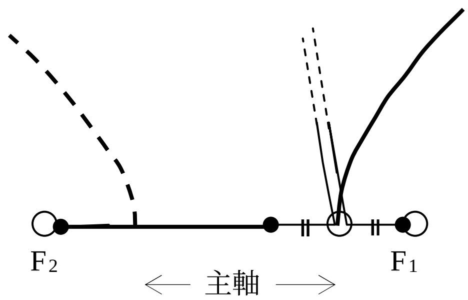
かない。以下、楕円の場合にならって双曲線を定義に従って黒板に作図する中で、漸近線という、主軸と共に形を決める重要な、中心を通る 2 直線があることを示そう。

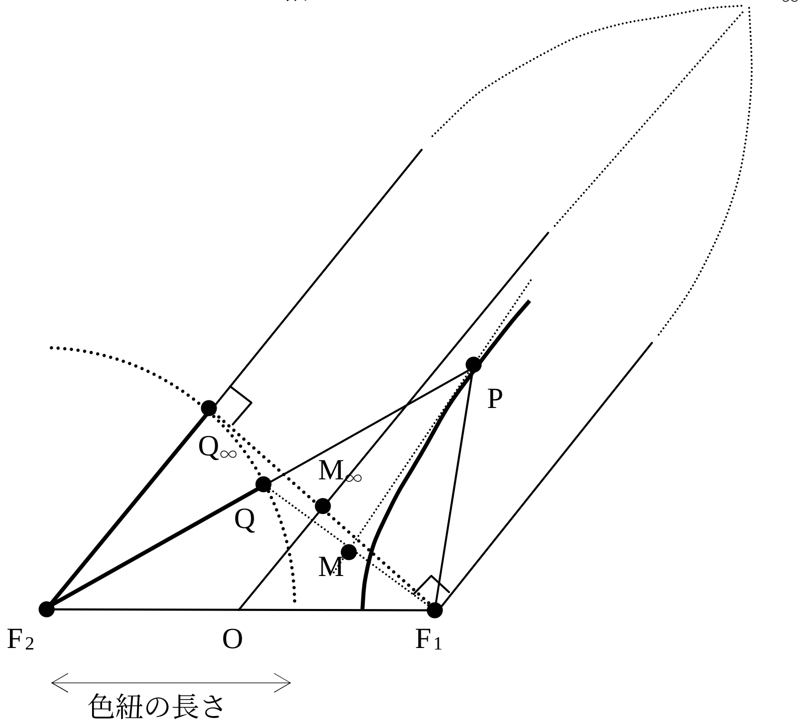
まず、色付き紐と、半分の長さの所に目印(ねじりん棒という名のついたテープ状の針金が適する)を付けた長い白紐を用意し、両者を下図のように結び両端に指の入る程度の輪を作る。ただし色付き紐が図では太線になっている。



楕円の章で触れた道具等を用いて補助者に両端の輪を 2 焦点 F_1, F_2 に固定してもらい、白紐の目印を持ちピンと張ると、目印を持つ手の位置を表す点 P は $PF_2-PF_1=$ (色付き紐の長さ) を満たす。ただし、遠い方の焦点を F_2 近い方を F_1 とした。点 P を動かすために、チョークが入る小さなリングを用意し、目印で折れている白紐を目印からリングにくぐらせて 2 本を同じ分量ずつゆっくり引き出す。その際に、リングにチョークを入れてリングの位置 P を記録するようにすれば、P は $PF_2-PF_1=$ (色付き紐の長さ) を満たしながら中心に近づき、線分 F_1F_2 上では結び目と点 F_1 との中点に来る。この結果双曲線の 1/4 が出来上がる。F_1, F_2 を入れ替え同様にすれば、1/2 が出来て(i)同様、下図より次の等式(iii)を得る。

(iii) 色付き紐の長さ＝主軸の長さ（双曲線は描き方から左右対称なので、主軸の延長線上で紐が余計な部分は主軸上の紐の通ってない部分と長さが等しい。よってそれらは移植可能）





次に、漸近線や、楕円における(ii)に相当する直角三角形も、自然に作図される事を以下に記そう。

色付き紐と白紐の結び目を Q とすると、P の決め方から PQ = P F_1で 3 角形 PQ F_1は二等辺 3 角形であり、∠PQF_1=∠PF_1Q。白紐の長さを限りなく大きくして行くことを考えると、3 角形 PQF_1の等辺は平行な 2 本の半直線となる(太陽から来る光が平行光線とみなせるようなもの)。そこで白紐の長さが無限大の時の、P を P_∞, Q を Q_∞とすると、∠$P_\infty Q_\infty F_1$と∠$P_\infty F_1 Q_\infty$は等しく、かつ平行線に関する性質よりたして 180 度でもあるので両者は直角であり，∠$F_1 Q_\infty F_2$も直角と分かる(Q_∞の位置は F_1中心で色付き紐の長さを半径とする円へと引いた接線の接点であり、前記円と F_1F_2 を直径とする円との交点として作図される)。

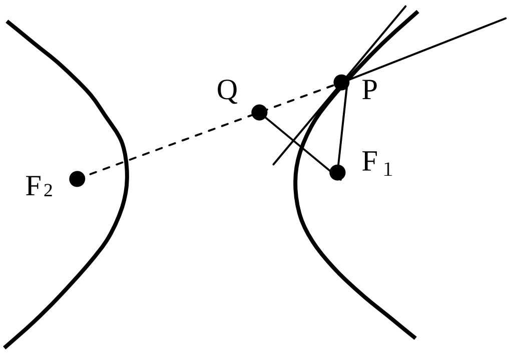
また、点 P は線分 QF の垂直 2 等分線上にあるので、無限遠点 P_∞は線分 $Q_\infty F_1$の垂直 2 等分線上にあるとしてよい事が分かり、$Q_\infty F_1$の垂直 2 等分線 OM_∞が漸近線(厳密には、点 Q が Q_∞に近づくと、点 P から直線 OM_∞までの距離が 0 に近づくことを示す必要があるが、可能)であることも分かる。

従って楕円の場合の(ii)に対応して次の(iv)を得る。

(iv) 点 F_1と中心 O、そして F_2中心で色付き紐の長さを半径とする円へと F_1から引いた接線の中点 M_∞(主軸を直径とする円と O F_1を直径とする円との交点)は、O F_1が斜辺の直角 3 角形をなす

なお、座標平面での楕円の標準形である $x^2/a^2 - y^2/b^2 = \pm 1$ では、主軸は、x 軸か y 軸に重なっていてそれらの長さは 2a と 2b のいずれかであり、2 焦点の間隔に文字 2c を使えば、3 角形 $OF_1 M_\infty$の 3 辺は a, b, c なので性質(iv)は $c^2 = a^2 + b^2$ で表され、OM_∞の傾きが b/a である事から漸近線が $y = \pm(b/a)x$ になる事もわかる。

楕円の場合と同様に次の定理が成立し、一つの焦点から出た光は双曲線で反射されて、もう一つの焦点から出た光のように見える事も双曲線の焦点の重要な性質である。



定理 焦点 F_1と F_2を持つ楕円上の任意の点 P に対し、線分 PF_1と PF_2のそれぞれが P での接線となす角は等しい。

証明　焦点 F_2から点 P の方向へ、双曲線の主軸の長さだけ離れた点を Q とする。F_1Q の垂直 2 等分線が点 P での接線でもある事が次のように示せる。まず、

$$PF_2 - PF_1 = （主軸の長さ）= F_2Q = PF_2 - PQ$$

なので PF_1=PQ であるから、F_1Q の垂直 2 等分線は点 P を通る。そして、点 P 以外のその上の任意の点 R に対しては、三角不等式より

$$|RF_2 - RF_1| = |RF_2 - RQ| < F_2Q = （主軸の長さ）$$

なので点 R が双曲線の定義を満たさず（外部と呼ばれる中心を含む領域にある)、F_1Q の垂直 2 等分線は 1 点 P でのみ双曲線と共有点を持つからである。従って F_1Q での垂直 2 等分線でもある点 P での接線は、∠QP F_1を 2 等分し、線分 PF_1と PF_2のそれぞれと等しい角をなすことがわかる。

3. おわりに

最後に言及したかったが、方程式を使わない、初等的な解説を目指す等の方針から触れなかった事を述べる。まずは、放物線である。双円錐を母線に平行に頂点を通らないように切ると楕円でも双曲線でもなく放物線が現れる。そして放物線には一つの焦点と準線があり、曲線上の点から焦点までの距離と準線までの距離が等しい事、無限遠から軸と平行に垂直に入射した光が放物線で反射されると焦点に集まる事などである。

次に楕円・双曲線・放物線の３者に共通する性質についてである。例えばこれらは、いずれも射影変換では互いに移りあい、射影幾何学の立場からは区別のつかない同じ曲線である。射影幾何学はグラフィックの基礎とも深い関わりを持つだけに興味深い。

そして、惑星や彗星等の天体や、燃料噴出時を除く人工衛星等の軌道が、太陽や地球を一つの焦点とする楕円・双曲線・放物線のうちのどれかになっていることである。物理の授業で引力による運動方程式の解曲線として得れる事を習得される事を願う。

参考文献

1, ヒルベルト、コーン＝フォッセン(芹沢正三訳)　直観幾何学　みすず書房　1966
2, G・ジェニングス(伊理正夫・伊理由美訳)　幾何学再入門　岩波書店　1996