

1 複素関数論

1.1 複素数と複素平面

1.1.1 複素数

実数 x, y に対して、 $z = x + iy$ を複素数といい、 x を複素数 z の実部、 y を複素数 z の虚部といい

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$$

とかく。複素数 $z = x + iy$ に対して、

$$x - iy$$

を z の共役複素数といい、

$$\bar{z}$$

で表す。以下の性質は明らかであろう。

定理 1 (1) $\bar{\bar{z}}_1 + \bar{\bar{z}}_2 = \overline{(z_1 + z_2)}$ (2) $\bar{\bar{z}}_1 \bar{\bar{z}}_2 = \overline{(z_1 z_2)}$ (3) $\frac{\bar{\bar{z}}_2}{\bar{\bar{z}}_1} = \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}$ (4) $z \bar{z} = |z|^2$

ここで、

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

であり、複素数 $z = x + iy$ の絶対値という。

また、以下の性質が成り立つ。

定理 2 (1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
(2) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (三角不等式)

1.1.2 複素平面

複素数 $z = x + iy$ に対して、平面上の点 (x, y) が決まる。逆に、平面上の点 (x, y) には必ず複素数 $z = x + iy$ が対応している。このことを、複素数 $z = x + iy$ の全体 (以下では、 C と書く) と平面上の点 (x, y) の全体とが 1 対 1 に対応しているといい、この 2 つを同一視する。平面上の

点をこのように見たときに、この平面を複素平面、又はガウス平面という。この場合、 x 軸上の点 $(x, 0)$ は実数 x に対応し、 y 軸上の点 $(0, y)$ は純虚数 iy に対応している。この意味で、 x 軸を実軸、 y 軸を虚軸という。複素数 $z = x + iy$ を表す点 (x, y) を極座標 (r, θ) で表すと

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), -\pi < \theta \leq \pi$$

となる。これらをそれぞれ複素数の絶対値、偏角といい、

$$r = |z|, \theta = \arg z$$

と表す。この表示を用いると

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

となる。

以下の性質が示される。

定理 3 (1) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ (2) $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$, $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg(z_2) - \arg(z_1)$

無限遠点 複素平面の構造を見る為に、この平面の原点 O でこの平面に接し、中心を Z 軸上に持つ半径 $\frac{1}{2}$ の球面

$$K; X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

を考える。この球面 K 上で平面と最も遠い点 N (座標では $(0, 0, 1)$ 、この点を北極という) と平面上の点 $z = z(x, y)$ を直線 l で結び、この直線 l と球面 K との交点を $P = (X, Y, Z)$ とする。平面上の点 z と、球面上の点 P とが一对一に対応していることは容易にわかる。この時に、平面上の点 z の座標 (x, y) と球面上の点 P の座標 (X, Y, Z) との関係は、

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, Y = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, Z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1},$$

$$x = \frac{X}{1 - Z}, y = \frac{Y}{1 - Z}$$

である。今、平面上で原点を通る直線 L を考えて、この直線 L 上の点 z が原点から限りなく遠ざかる時に、対応する球面上の点 P は限りなく北極 N に近づく。この、北極 N に対応する点を平面上で仮に考えよう。この点を無限遠点と呼ぶのである。

1.2 複素数列と複素級数

1.2.1 複素数列

実数の場合と同様に、複素数の場合にも、数列及び級数の収束・発散について考えることができる。簡単に復習してみよう。

定義 4 無限数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数 c に収束するとは、 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |z_n - c| \leq \varepsilon$

この定義から、複素数 z_n 及び c をそれぞれ $z_n = x_n + iy_n, c = a + ib$ と書けば、数列 z_n が c に収束することと、数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及び数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ a 及び b に収束することとは同じことである。以下の性質は実数の場合と同様に成り立つ。

定理 5 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n}{w_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$)

1.2.2 複素級数

実数の場合と全く同様に級数及びべき級数を定義する。そこで得られた幾つかの定理や公式は全て成り立つので、ここでは繰り返しては述べてない。

ここで、オイラーの公式について述べておこう。 x が実数の時に、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

であるが、この両辺の x に $i\theta$ を形式的に代入すると、

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

となる。ここで、

$$(i\theta)^{2m} = (-1)^m \theta^{2m}, (i\theta)^{2m+1} = i(-1)^m \theta^{2m+1}$$

に注意して上の右辺の実部と虚部をわけて見ると、

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

なり、これはそれぞれ $\cos \theta$ 及び $\sin \theta$ の展開になっている。だから、

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ (オイラーの公式)}$$

と定義する。

従って、7.1.2 により、

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

となる。この形で複素数を表示すれば、1.1.2 の定理 3 は容易に示すことが出来る。

例題 1 . 方程式

$$z^n = \alpha$$

の解を求めよ。

(解)

$$z = re^{i\theta}, \alpha = r_0 e^{i\theta_0}$$

とおいて、方程式 $z^n = \alpha$ に代入する。

$$\begin{aligned}(re^{i\theta})^n &= r_0 e^{i\theta_0}, \\ r^n e^{in\theta} &= r_0 e^{i\theta_0},\end{aligned}$$

よって

$$r^n = r_0, n\theta = \theta_0 + 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

だから、

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots$$

となり、

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots$$

である。従って、解は

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots$$

である。この内で次ぎの n 個の相異なる解が求めるものである。

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

この方程式を円分方程式という。◀

問題 1 . 次の方程式を解け。

$$(1) z^6 = -1 \quad (2) z^3 = 8i$$

1.3 複素関数

1.3.1 関数の極限・連続性

極限 関数の極限については実関数の場合と同様であるが、簡単に復習しておこう。最初に複素関数 $w = f(z)$ を考える範囲（定義域）を決めておこう。複素数 a と正の実数 ρ に対して集合 $U_\rho(a)$ を

$$U_\rho(a) = \{z; |z - a| < \rho\}$$

とするとこれは複素平面では、中心が a 、半径が ρ の円の内部を表す。特別な場合として、 $\rho = \infty$ の時には、全平面を表す。複素平面上の集合 D が、 D に属する全ての点 a に対して、適当な ρ を選べば $U_\rho(a) \subset D$ と出来る時に、集合 D は開集合であるという。また、集合 D が、 D に属する任意の 2 点 a, b に対して a と b とを結ぶ連続曲線が D 内に取れる時に、集合 D は連結であるという。今後は、複素関数を考えるときにはいつも開でしかも連結な範囲（これを領域という） D で考えることにしよう。

さて、関数 $w = f(z)$ の定義域 D 内の一点 $z = z_0$ における極限值が α であるとは、以下のように定義し、

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$$

と書く。

$$\text{「}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z; 0 < |z - z_0| < \delta, |f(z) - \alpha| < \varepsilon\text{」}$$

これを読むときには、「任意に与えた正の実数 ε に対して、ある正の実数 δ が決まって、 $0 < |z - z_0| < \delta$ であるような任意の複素数 z に対しては、常に不等式 $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$ が成立している」と読む。上の定義は

$$\text{「}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in U_\delta(z_0), z \neq z_0, f(z) \in U_\varepsilon(\alpha)\text{」}$$

と同じである。実関数と場合と同様に以下の性質が成り立つ。

$$(1) \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

関数の連続性 関数の連続性に関しても、実関数の場合と同様に定義を行い、幾つかの性質も同様に成り立つ。簡単に触れよう。関数 $w = f(z)$ が点 $z = z_0$ で連続であるとは、等式

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

が成り立つことであるとする。従って、正確に述べれば

$$\text{「} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z; |z - z_0| < \delta, |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{」}$$

となる。以下の性質も明らかであろう。

2つの関数 $f(z), g(z)$ が点 $z = z_0$ で共に連続であるときには、和及び差； $f(z) \pm g(z)$, 積； $f(z)g(z)$, 商； $\frac{f(z)}{g(z)}, g(z_0) \neq 0$, は何れも点 $z = z_0$ で連続である。

1.3.2 微分可能性とコーシー・リーマンの関係式

関数の定義域 D 内の点 z_0 で、次の極限值が存在するときに、関数 $w = f(z)$ は点 z_0 で微分可能であるといい、この極限値を

$$f'(z_0) \text{ 又は } \frac{df}{dz}(z_0)$$

で表し、点 z_0 における関数 $f(z)$ の微分係数とよぶ。

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

定義域 D 内の全ての点で微分可能の時に、関数 $f(z)$ は D で微分可能であるという。この場合には、 $z \rightarrow f'(z)$ と見て、関数 $f(z)$ の導関数という。以下の性質は実関数の場合と同様であり、証明も同じようにすれば良い。

$$(1) (f + g)' = f' + g'$$

$$(2) (fg)' = f'g + fg'$$

$$(3) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, g \neq 0$$

コーシー・リーマンの関係式 $z = x + iy, w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と実部と虚部に分けて、実部 $u(x, y)$ 及び虚部 $v(x, y)$ を (x, y) の関数と見なした場合に、次ぎの定理が成立する。

定理 6 関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が、点 $z_0 = x_0 + iy_0$ で微分可能である為の必要・十分条件は、点 (x_0, y_0) で $u(x, y), v(x, y)$ が全微分可能であって、しかも関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成立することである。上の関係式をコーシー・リーマンの関係式という。

ここで、関数の全微分可能性について触れておこう。一般に x, y の 2 変数関数 $h(x, y)$ がある点 (a, b) の近くで全微分可能であるとは、定数 A, B が決まって、 $h(x, y) = h(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + \eta r$ の形で書けて、 $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \rightarrow 0$ の時に、 $\eta \rightarrow 0$ となっていることをいう。

(注意) 関数 $w = f(z)$ が点 $z_0 = x_0 + iy_0$ で微分可能であるばかりでなく、適当な ρ が存在して、 $U_\rho(z_0)$ の各点でも微分可能である時に、関数 $f(z)$ は点 z_0 で正則であるという。

(例) 1. $w = z^2$ について $z = x + iy$ において

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

となる。だから、

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

であり、

$$u_x = 2x = v_y, u_y = -2y = -v_x$$

となってコーシー・リーマンの関係式が全ての点 (x, y) で成り立つ。従って、関数 $w = z^2$ は、全平面で微分可能である。よって、全平面で正則であるといえる。◀

2. $w = |z|^2$ について $z = x + iy$ において

$$w = x^2 + y^2$$

となる。だから、

$$u = x^2 + y^2, v = 0$$

であり、

$$u_x = 2x, v_y = 0, u_y = 2y, v_x = 0$$

となってコーシー・リーマンの関係式は原点で成り立ち、それ以外の全ての点で成り立たない。従って、関数 $w = |z|^2$ は、原点で微分可能であるが、それ以外の点では微分可能ではない。よって、全平面で正則ではない。◀

1.3.3 一次関数（分数関数）

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素数として、 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ とするときに、

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

で定義される z の関数 w を一次関数という。

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}}{z + \frac{\delta}{\gamma}} = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{z + \gamma_1},$$

但し、 $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \beta_1 = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}, \gamma_1 = \frac{\delta}{\gamma}$, のように変形すると、一次関数 $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ は、次の幾つかの関数の合成であることがわかる。

$$z_1 = z + \gamma_1, z_2 = \frac{1}{z_1}, z_3 = \beta_1 z_2, w = z_3 + \alpha_1$$

従って、一次関数の性質を調べるには、次の3つの関数の性質を調べれば良い。

(1) $w = z + \alpha$, この関数は、平面上で z を α だけ平行移動することである。

(2) $w = \beta z$, この関数は、平面上で z を $\arg \beta$ だけ回転し、 z の長さを $|\beta|$ 倍することである。

(3) $w = \frac{1}{z}$, この関数は、平面上で z を実軸に対称に移動し、原点からの距離を $|z|$ から $\frac{1}{|z|}$ に変えること（中心が原点 O 、半径1の円（この円を単位円という）に関する反転という）である。

これらの (1) ~ (3) の関数に共通な性質は、平面上の円を再び円に移すことである。この性質を円円対応という。従って、もとの一次関数も円円対応の性質を持つ。

問題 2 . 関数 $w = z + \frac{1}{z}$ によって、 z 平面上の原点を中心とした半径 r の円は、 w 平面上のどのような図形に写されるか。但し、 $r > 0$ 。

1.3.4 べき関数 $w = z^n$ (n : 自然数)

ここでは、関数

$$w = z^n$$

による変換 (写像) について考えよう。それぞれを極座標で表示して、

$$z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\Theta}$$

と置き両辺に代入すれば、

$$\rho e^{i\Theta} = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

となるので、

$$\rho = r^n$$

及び、

$$\Theta = n\theta$$

が得られる。

最初に、 z 平面上で r を固定すると、即ち点 z が中心が原点 O 、半径 r の円周上を動くと、 w 平面では、 $\rho = r^n$ だから、点 w は中心が原点 O 、半径 r^n の円周上を動く。この時に、関係式 $\Theta = n\theta$ から、 z 平面のこの円周上で z が、扇形 $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$ の間を動く間に w 平面では、 $0 < \Theta < 2\pi$ だから、円周全体を動く。

次に、 z 平面上で z が半直線 $\arg z = \theta$ 上を原点から無限遠方まで動く時には、 w 平面では、 w は半直線 $\arg w = n\theta$ 上を原点から無限遠方まで動く。従って、以上のことから、 z 平面の角領域 $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ が全 w 平面に写される。

(注意) 上で考察したことを考慮して、関数 $w = z^n$ の逆関数として、関数 $w = \sqrt[n]{z}$ を定義するのである。

1.4 べき級数と初等超越関数

1.4.1 べき級数

実係数のべき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, (c_n は実数) に関しては、既に学んである。そこで述べた色々の性質は全て複素係数の複素べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, (c_n は複素数) の場合にも、殆んど変更することなしにそのまま成立する。特に、収束する範囲が複素平面上では、円になり(この円を収束円という) 収束半径はその円の半径になる。また、次の定理から、正項級数を取り扱う意味もはっきりするであろう。

定理 7 複素級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ について、 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束すれば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束する。

以下、簡単に定理を述べておこう。

定理 8 複素べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \rho$$

とおけば、この級数は

$$|z| < \frac{1}{\rho} (= R \text{ と置いて収束半径 という})$$

の範囲で絶対かつ一様に収束する。

定理 9 複素べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ は収束円の内部で何回でも微分出来て、

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n z^{n-k}$$

が成り立つ。

以下で、初等超越関数と呼ばれる基本的な関数について定義と簡単な性質を挙げておこう。

1.4.2 指数関数 $w = e^z$

x が実数の時に、 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ であるが、この両辺の x に z を代入すると、

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

となる。この右辺のべき級数は、上の定理を使うと収束半径は ∞ となり、全ての z に対して収束することがわかる。そこで、改めて e^z を $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ で定義しよう。この時に、

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z,$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

等の性質は容易に確かめられる。

更に、 $z = x + iy$ の時には、 $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ であるから、 $|w| = e^x$, $\arg w = y$ となる。従って、 z 平面上で $\operatorname{Re} z = x$ を固定して、 y を $0 < y < 2\pi$ の範囲で動かすと、 w 平面上で、 $w = e^z$ は半径が e^x の円周上を原点の周りに一周する。また、次ぎに、 z 平面上で $\operatorname{Im} z = y$, $0 < y < 2\pi$, を固定して、 x を $-\infty < x < \infty$ の範囲で動かすと、 w 平面上で、 $w = e^z$ は半直線 $\arg w = y$ 上を原点から無限遠方まで動く。故に、 z 平面上の帯状の領域 $\{(x, y); 0 < y < 2\pi, -\infty < x < \infty\}$ が、 w 平面の全体に写されることがわかる。また、関数 $w = e^z$ は周期 $2\pi i$ の周期関数であることもわかる。

また、指数関数 $w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = u + iv$ とおくと、 $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ となる。このときに、 $u_x = e^x \cos y = v_y$, $u_y = -e^x \sin y = -v_x$ が成り立つから、指数関数 $w = e^z$ は全平面でコーシー・リーマンの関係式が成り立ち微分可能（従って、正則）である。

1.4.3 対数関数 $w = \log z$ とべき関数 $w = z^\alpha$ (α : 複素数)

実関数の場合と同じように、指数関数の逆関数として対数関数を定義する。

$$z = e^w$$

の両辺にそれぞれ

$$z = re^{i\theta}, w = u + iv$$

を代入すると

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$$

だから

$$r = e^u, e^{i\theta} = e^{iv}$$

従って、

$$u = \log r, v = \theta + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \dots$$

よって、

$$w = u + iv = \log r + i(\theta + 2n\pi), n = 0, \pm 1, \dots$$

よって

$$w = \log z = \log |z| + i(\arg z + 2n\pi), n = 0, \pm 1, \dots$$

となり、この関数は無限多価関数となる。

$$(\text{例}) \log i = \log |i| + i(\arg i + 2n\pi) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$\log(1+i) = \log |1+i| + i(\arg(1+i) + 2n\pi) = \log \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right),$$

$$\log e = \log e + i(0 + 2n\pi) = \log e + i2n\pi = 1 + i2n\pi$$

次に、上の対数関数の定義を使ってべき関数

$$w = z^\alpha, (\alpha; \text{複素数})$$

を定義しよう。

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

であるから、

$$\begin{aligned} w &= z^\alpha = e^{\alpha \log z} \\ &= e^{\alpha(\log |z| + i(\arg z + 2n\pi))}, n = 0, \pm 1, \dots, \end{aligned}$$

と定義するのである。この場合、 z^α は一般には無限多価関数になる。

$$(\text{例}) i^i = e^{i \log i} = e^{i\left(i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}, n = 0, \pm 1, \dots,$$

1.4.4 関数 $w = \sqrt[k]{z}$

特に、 $\alpha = \frac{1}{k}$ の場合（但し、 k は自然数）は

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{k}} &= e^{\frac{(\log |z| + 2n\pi i)}{k}} = e^{\frac{\log |z|}{k}} e^{\frac{2n\pi}{k} i} \\ &= \sqrt[k]{|z|} \left(\cos \frac{2n\pi}{k} + i \sin \frac{2n\pi}{k} \right), n = 0, \pm 1, \dots, \end{aligned}$$

となつて、上の無限個の値の中で互いに相異なるのは、

$$\sqrt[k]{|z|} \left(\cos \frac{2n\pi}{k} + i \sin \frac{2n\pi}{k} \right), n = 0, 1, \dots, (k-1)$$

の k 個である。上の定義は、べき関数 $w = z^k$ の逆関数になっており、 k 価多価関数である。

$$\begin{aligned} (\text{例}) \sqrt{(-i)} &= (-i)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log(-i)} = e^{\frac{1}{2} \{ \log |-i| + (-\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i \}} = e^{\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i} = \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{n\pi i} = \pm \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

1.4.5 三角関数 $w = \cos z, \sin z$

複素変数の三角関数の定義は、指数関数の定義と同様に、実関数のべき級数展開をもとに行う。詳しくいえば、実関数の場合のべき級数展開、 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 、及び $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ で、形式的に $x = z$ と置いて得られる

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

で

$$\cos z, \sin z$$

を定義するのである。つまり、

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

これらのべき級数の収束半径は何れも ∞ であることは、収束半径を計算する式からわかる。その時に、収束円の中では項別微分が許されることから、

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

及び

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

が成り立つ。また、関係式

$$\cos(-z) = \cos z, \sin(-z) = -\sin z$$

も容易にわかる。更に、指数関数との関係は

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

だから、 $\cos z$ 及び $\sin z$ は周期 2π の周期関数であることがわかる。他に、三角関数の加法定理や公式

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

等が成り立つことも確かめられる。

例題 1 . 方程式

$$\cos z = 2$$

を解け。

(解法)

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 2$$

より、 $X = e^{iz}$ とおくと、 X に関する方程式は

$$X + \frac{1}{X} = 4$$

となる。即ち、

$$X^2 - 4X + 1 = 0$$

よって、

$$X = 2 \pm \sqrt{3}$$

従って、

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$$

だから, $z = x + iy$ と置くと、

$$\begin{aligned} e^{-y+ix} &= 2 \pm \sqrt{3}, \\ e^{-y}(\cos x + i \sin x) &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

となつて、

$$\sin x = 0, e^{-y} \cos x = 2 \pm \sqrt{3},$$

から、

$$x = 2n\pi,$$

及び

$$\begin{aligned} e^{-y} &= 2 \pm \sqrt{3}, \\ y &= -\log(2 \pm \sqrt{3}), \end{aligned}$$

がわかり、従って、

$$z = 2n\pi - i \log(2 \pm \sqrt{3})$$

となる。◀

問題 3 . 次の値を求めよ。

$$(1) \sqrt{1+i} \quad (2) \sqrt[3]{i} \quad (3) \log(1+i) \quad (4) \operatorname{Log}(-1) \quad (5) (1+i\sqrt{3})^i$$

1.5 複素積分とコーシーの積分定理

1.5.1 複素積分

複素平面上の領域 D 内の曲線 C が

$$z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \leq t \leq \beta, z(\alpha) = a, z(\beta) = b$$

で定義されている時に、 C 上で定義された関数 $w = f(z)$ のこの曲線 C に沿っての積分を

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$$

で定義し、

$$\int_C f(z)dz$$

と書くことにする。

例題 1 . 複素平面上の原点 $O(0,0)$ と点 $1+i(=(1,1))$ とを直線 C_1 で結ぶ。この時に、曲線 C_1 上の関数 $w = z$ の積分を計算せよ。また、点 $1+i$ に行くのに x 軸上を点 $1(=(1,0))$ 迄行き、その後 x 軸に垂直に点 $1+i(=(1,1))$ まで行く道を C_2 として、 C_2 上の関数 $w = z$ の積分を計算せよ。また、 $w = z^2$ の場合に計算をせよ。

(解法) C_1 上では、

$$z(t) = t + it = (1+i)t, 0 \leq t \leq 1,$$

と書かれるから、

$$z'(t) = (1+i)$$

よって、 $w = z$ の場合は、

$$\begin{aligned} \int_{C_1} z dz &= \int_0^1 (1+i)t(1+i)dt \\ &= (1+i)^2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= i. \end{aligned}$$

また、 $w = z^2$ の場合は、

$$\begin{aligned} \int_{C_1} z^2 dz &= \int_0^1 (1+i)^2 t^2 (1+i) dt \\ &= (1+i)^3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{(1+i)^3}{3} \end{aligned}$$

また、 C_2 上では、

$$0 \leq t \leq 1$$

の時には、

$$z(t) = t, z'(t) = 1,$$

$$1 \leq t \leq 2$$

の時には、

$$z(t) = 1 + i(t - 1), z'(t) = i$$

とそれぞれ書かれるから、 $w = z$ の場合は、

$$\begin{aligned} \int_{C_2} z dz &= \int_0^1 t dt + \int_1^2 \{1 + i(t - 1)\} i dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[(1 + i)t - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 \\ &= i \end{aligned}$$

また、 $w = z^2$ の場合は、

$$\begin{aligned} \int_{C_2} z^2 dz &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 \{1 + i(t - 1)\}^2 i dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{\{1 + i(t - 1)\}^3}{3i}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{(1 + i)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{(1 + i)^3}{3} \end{aligned}$$



例題 2 . 中心が α で、半径が r の円周を C とし、関数 $\frac{1}{(z - \alpha)^n}$ の C 上の積分を計算せよ。

(解法) C は、

$$z(t) = \alpha + re^{it}, 0 \leq t < 2\pi$$

と表示出来る。この時に、

$$z'(t) = ire^{it}$$

だから、

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{(z-\alpha)^n} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{it})^n} ire^{it} dt \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t} dt \\ &= \begin{cases} 2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。◀

1.5.2 コーシーの積分定理

定理 10 関数 $f(z)$ が D 内で正則であるとする、 D 内の任意の単純閉曲線 C に沿っての積分は

$$\int_C f(z) dz = 0$$

となる。

1.6 コーシーの積分公式

次の定理はコーシーの積分公式と呼ばれている。

定理 11 関数 $f(z)$ が D 内で正則であるとする。 D 内の任意の点 a とこの点を囲み D 内にある任意の閉曲線 C に対して、公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

が成り立つ。

上の定理から、次ぎの定理が示せる。

定理 12 関数 $f(z)$ が D 内で正則であるならば、関数 $f(z)$ は内の各点で何回でも微分可能で、 D 内の任意の点 a とこの点を囲み D 内にある任意の閉曲線 C に対して、公式

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, n = 1, \dots, \dots$$

が成り立つ。

問題 4 . 次の関数の曲線上での積分を計算せよ。

$$(1) \frac{2z-1}{(z-2)(z-i)} C; |z-i|=1 \quad (2) \frac{z^2}{z^3-8} C; |z-2|=1 \quad (3) \frac{e^z}{z} C; |z|=1 \\ (4) \frac{\sin z}{z+i} C; |z+i|=2 \quad (5) \frac{ze^z}{(z-1)^2} C; |z-1|=2$$

1.7 関数の展開

1.7.1 テーラー展開

定理 13 関数 $f(z)$ が領域 D で正則な時に、 D 内の任意の点 a を中心として、 D 内に含まれる円内において、関数 $f(z)$ は次の形にべき級数展開出来る。

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \dots$$

a を展開の中心といい、特に $a=0$ の場合には、上の級数をマクローリン展開という。

(注意) 1 . この定理の結果によれば、複素関数は一回微分出来れば(正則ならば)、べき級数展開出来ることを主張しており、実関数の世界では成り立たないことがいえることになる。

2 . 実関数の場合に得られているように、対数関数、無理関数、分数関数はそれぞれ以下のような展開を持っていることは、計算で確かめられる。

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n!}, |z| < 1$$

$$(1+z)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)z^n}{n!}, |z| < 1, k; \text{実数}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

更に、実関数の場合と同じように、収束円の内部では、項別微分、項別積分が何れも許される。

ここで、上のテーラー展開の公式から得られる幾つかの定理を述べておく。これらの定理は直接計算で使うことは少ないが、数学では重要な定理ばかりである。

定理 14 領域 D 内で正則な 2 つの関数 $f(z), h(z)$ に対して、 D 内の点 z_0 に収束する無限点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって、もしも、

$$f(z_j) = h(z_j), j = 1, \dots, \dots$$

が成り立っているならば、領域 D 内の全ての点で

$$f(z) = h(z)$$

が成り立つ。(一致の定理)

定理 15 領域 D 内で正則な関数 $f(z)$ が、 D 内の 1 点 a で $|f(z)|$ の最大値を取れば、関数 $f(z)$ は定数になる。(最大値の原理)

定理 16 領域 D 内の正則関数列 $\{f_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ が関数 $f(z)$ に D 内で一様収束すれば、関数 $f(z)$ は D 内で正則である。

定理 17 全平面で正則で(この性質を持つ関数を整関数という)、有界な関数は定数に限る。

定理 18 n 次代数方程式は必ず n 個の解を持つ。ここで、 n 次代数方程式とは、

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots a_k z^{n-k} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

$$a_j, j = 0, 1, \dots, n, \text{ は複素数}$$

のことである。

1.7.2 ローラン展開

テーラー展開は、点 a のまわりで正則な関数のべき級数展開を与えるが、点 a のまわりで正則でない関数の展開は以下ようになる。

定理 19 関数 $f(z)$ は、同心円の内部

$$D = \{z : R_1 < |z - a| < R_2\}$$

で正則であるとする（従って、点 a で関数が正則でない場合を含む）。この時には、関数 $f(z)$ は D 内で以下のように展開出来る。

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z - a)^n,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ここで、曲線 C は、中心が $z = a$ 、半径が r 、 $R_1 < r < R_2$ 、の円周である。

（注意）1. 特に関数 $f(z)$ が、 $|z - a| < R_1$ で正則な場合には、

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, \dots,$$

となり、更に、

$$c_{-n} = 0, n = 0, 1, \dots$$

である。つまり、べき級数で負べきの項は現れない。（定理 55、56 を参照のこと）

2. $n \geq 0$ の部分はテーラー展開と同じであり、 $z = a$ の特異性は専ら $n < 0$ の部分に現れる。その意味で、

$$\sum_{n=-1}^{n=-\infty} c_n (z - a)^n$$

の部分を展開の主要部という。特に、係数が零でない最高の負べきが $(z - a)^{-p}$ の時に、点 a は関数 $f(z)$ の p 位の極であるという。そのような p が存在しない時には、点 a は関数 $f(z)$ の真性特異点であるという。

3. 関数

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

は、点 $z = 0$ では定義されていないので、 $z = 0$ は特異点である。しかし、関数 $\sin x$ の展開

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

を分母に代入すると、

$$f(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \dots,$$

となり、主要部はない。ここで、改めて

$$f(0) = 1$$

と定義すれば、関数 $f(z)$ は、 $z = 0$ でも正則になる。このような点のことを除去可能な特異点と呼ぶ。次の定理が成り立つ。

定理 20 関数 $f(z)$ が $0 < |z - a| < R$ で正則で、しかもこの範囲で有界であるならば、点 a は関数 $f(z)$ の除去可能な特異点である。

(例題 1) 関数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

を原点を中心とするローラン展開せよ。

(解法) この関数の特異点は $z = 1, 2$ であるから、次の 3 つの場合に分けて考える。

(1) $|z| < 1$ の時には関数 $f(z)$ は正則だから、

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}$$

と変形して、

$$\left| \frac{z}{2} \right| < 1, |z| < 1$$

により

$$\begin{aligned}f(z) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n}\right)\right) z^n \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n\end{aligned}$$

と展開できる。◀

(2) $1 < |z| < 2$ の時、

$$f(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

と変形して

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1, \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

によって、

$$\begin{aligned}f(z) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

と展開できる。◀

(3) $2 < |z|$ の時、

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

と変形して

$$\left|\frac{2}{z}\right| < 1, \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

によって、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

と展開できる。◀

問題5 . 次の関数の点 α のまわりのテイラーまたはマクローリン展開を求め、収束半径も計算せよ。

(1) $\frac{1}{z-3} (\alpha = i)$ (2) $\frac{\cos z}{z^2+2} (\alpha = 0)$ (3) $\frac{1}{z^3(2-z)} (\alpha = 0)$ (4) $\frac{z+2}{z^3+z^2} (\alpha = 0)$ (5) $\frac{1}{(z-1)^2(z^2-4)} (\alpha = 1)$ (6) $\frac{z}{e^z-1} (\alpha = 0)$

1.7.3 ローラン展開と留数計算

点 $z = a$ が関数 $f(z)$ の特異点であり、閉曲線 C の内部には a 以外の特異点を含まないとするときに、関数 $f(z)$ の点 a における留数を

$$Res[f; a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

と定義する。この式の右辺に定理 6.3 で得られたローラン展開を代入して、項別積分を行うと、関係式

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \int_{C_\rho(a)} \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$$

(ここで $C_\rho(a)$ は中心が a , 半径が ρ の円周を表す) によって

$$\begin{aligned} Res[f; a] &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-a)^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_C c_n (z-a)^n dz \\ &= c_{-1} \end{aligned}$$

が得られる。以下では、点 a が 1 位の極の場合、更に、点 a が p 位の極の場合に分けて c_{-1} を求める方法を考えよう。

(1) 点 a が 1 位の極の場合、

$$f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-a)^n,$$

だから、

$$f(z)(z-a) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-a)^{n+1}$$

よって、

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$$

◀

(2) 点 a が p 位の極の場合、

$$f(z) = c_{-p}(z-a)^{-p} + c_{-(p-1)}(z-a)^{-(p-1)} + \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-a)^n,$$

だから、

$$f(z)(z-a)^p = c_{-p} + c_{-(p-1)}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{p-1} + \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-a)^{n+p},$$

よって、

$$c_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \{f(z)(z-a)^p\}$$

◀

1.7.4 定積分の計算への応用

次の定理は実関数の定積分の計算をするときに、よく用いられる。

定理 21 D 内で定義された関数 $w = f(z)$ が、 D 内の単一閉曲線 C の内部で、 n 個の点 $z = a_j, j = 1, \dots, n$, を除き正則であるとする。この時に、次の関係式が成り立つ。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \text{Res}[f, a_j]$$

幾つかの例題で、応用について述べよう。

例題 1 .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

を計算せよ。

(解法) $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ において、関数 $f(z)$ を次の積分路 C で積分しよう。

$$C = C_1 + C_2,$$

$$C_1; \text{Im} z = 0, -R < \text{Re} z < R,$$

$$C_2; |z| = R, \text{Im} z > 0.$$

この関数 $f(z)$ の考えている積分路 C の中にある特異点は、

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i \frac{\pi}{4}}$$

と

$$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

の 2 つである。これらの特異点 $z = z_j, j = 1, 2$ は何れも関数 $f(z)$ の 1 位の極であり、それらの点における留数はそれぞれ以下のように計算出来る。

$$\text{Res}[f; z_j] = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{z - z_j}{z^4 + 1} = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{1}{4z^3}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-i \frac{3\pi}{4}}, j = 1 \\ \frac{1}{4} e^{-i \frac{9\pi}{4}}, j = 2 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{2}} - i \frac{1}{4\sqrt{2}}, j = 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} - i \frac{1}{4\sqrt{2}}, j = 2 \end{cases}$$

従って、

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z^4+1} dz &= 2\pi i (\text{Res}[f; z_1] + \text{Res}[f; z_2]) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}} - i\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} - i\frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \\ &= \pi \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

が成り立つ。そこで、左辺の積分 $\int_C \frac{1}{z^4+1} dz$ を2つの和

$$\int_{c_1} \frac{1}{z^4+1} dz + \int_{c_2} \frac{1}{z^4+1} dz$$

に直してそれぞれの積分について、以下のように考える。

C_1 では、 $z = x$ とおけば、

$$\int_{c_1} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx$$

となる。よって、 $R \rightarrow \infty$ とすると、

$$\int_{c_1} \frac{1}{z^4+1} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx.$$

C_2 では、

$$z = Re^{i\theta}, 0 < \theta < \pi,$$

とおけば、

$$\begin{aligned}dz &= iRe^{i\theta} d\theta, \\ |z^4+1| &= |(Re^{i\theta})^4+1| \geq R^4-1,\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\left| \int_{c_1} \frac{1}{z^4+1} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^4+1} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^4-1} d\theta \\ &= \frac{\pi R}{R^4-1} \rightarrow 0 \text{ (as } R \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

となる。だから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

である。◀

例題 2 .

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta}, (a > b > 0)$$

を計算せよ。

(解法)

$$z = e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi,$$

とおくと、 z は中心が原点 O で、半径 1 の円周上 C を動く。即ち、

$$C; |z| = 1。$$

この時に、オイラーの公式によって、

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

また、

$$dz = ie^{i\theta} = izd\theta, 0 < \theta < 2\pi,$$

更に、

$$a + b \cos \theta = a + b \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2z}(bz^2 + 2az + b),$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} &= \int_C \frac{2z}{bz^2 + 2az + b} \frac{1}{iz} dz \\ &= \int_C \frac{2}{bz^2 + 2az + b} \frac{1}{i} dz \\ &= 4\pi \times (C \text{ 内の関数 } f(z) = \frac{1}{bz^2 + 2az + b} \text{ の留数の和}) \end{aligned}$$

ところで、関数 $f(z) = \frac{1}{bz^2 + 2az + b}$ の積分路 C 内にある特異点は、方程式

$$bz^2 + 2az + b = 0$$

の解

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

のうちで

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

1 点である。一方で z_1 における関数 $f(z)$ の留数は、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f, z_1] &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{bz^2 + 2az + b} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{2bz + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned}$$

と計算できる。よって、

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

◀

例題 3 .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx$$

を計算せよ。

(解法) 関数 $f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2 + 1}$ を考えて、積分路 C は上の例題 1 と同じとする。つまり、

$$C = C_1 + C_2,$$

$$C_1; \operatorname{Im} z = 0, -R < \operatorname{Re} z < R,$$

$$C_2; |z| = R, \operatorname{Im} z > 0.$$

積分路 C 内にある関数 $f(z)$ の特異点は $z = i$ であり、 i における関数 $f(z)$ の留数は

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left[\frac{e^{imz}}{z^2 + 1}, i\right] &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{imz}}{2z} = \frac{e^{-m}}{2i} \end{aligned}$$

と計算できる。従って、

$$\int_C \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}$$

である。

ここで、例題 1 のように積分路を C_1 と C_2 に分けて考える。

最初に C_1 上では、 $z = x$ だから

$$\int_{C_1} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx = \int_{-R}^R \frac{\cos mx + i \sin mx}{x^2 + 1} dx$$

となり、

次ぎに C_2 上では、

$$z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

と置いて、

$$dz = iRe^{i\theta} d\theta,$$

また、

$$|e^{imz}| = |e^{im(x+iy)}| = |e^{imx} e^{-my}| = |e^{-my}| = e^{-my} \leq 1, 0 \leq y,$$

が得られる。従って、

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz \right| &\leq \int_{C_2} \left| \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} \right| |dz| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} d\theta = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0 (as R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となり、 $R \rightarrow \infty$ の時の極限を考えると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx + i \sin mx}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-m}$$

が得られる。上の等式の実部と虚部をそれぞれ等号で結んで

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-m}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x^2 + 1} dx = 0,$$

が得られる。◀

例題 4 . $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を計算せよ。

(解法) 関数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

を次の積分路 C

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4,$$

$$C_1 = \{Imz = 0, \varepsilon \leq Rez \leq R\},$$

$$C_2 = \{|z| = R, Imz > 0\},$$

$$C_3 = \{Imz = 0, -R \leq Rez \leq -\varepsilon\},$$

$$C_4 = \{|z| = \varepsilon, Imz > 0\},$$

で積分する。この積分路 C 内には関数 $f(z)$ の特異点は含まれないので、

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

である。以下では各積分路 $C_j, j = 1, \dots, 4$, 上での積分を考えよう。

最初に、 C_1, C_3 上の積分は

$$z = x, \varepsilon < x < R, -R < x < -\varepsilon$$

だから、

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix'}}{x'} dx' \\ &= \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-iy}}{y} dy, (x' = -y) \\ &= 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx (as \varepsilon \rightarrow 0 \text{ and } R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。

次に、 C_2 上の積分は、

$$z = Re^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta), 0 < \theta < \pi, dz = iRe^{i\theta}d\theta,$$

において、関数 $\frac{e^{iz}}{z}$ が

$$\left| \frac{e^{iz}}{z} \right| = \left| \frac{e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{Re^{i\theta}} \right| = \frac{e^{-R \sin \theta}}{R}$$

ように評価されるので、積分は

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &\leq \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 \text{ (as } R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

と評価される。ここでは、不等式

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta \leq \theta, (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \dots (*)$$

を使った。

この不等式 (*) の証明は以下のものである。

$$F(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$$

と置いて、

$$F'(\theta) = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}$$

ここで、

$$G(\theta) = \theta \cos \theta - \sin \theta$$

と置き、

$$G'(\theta) = -\theta \sin \theta \leq 0, (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

により関数 $G(\theta)$ は減少関数。従って、

$$G(\theta) \leq G(0) = 0$$

によって

$$F'(\theta) \leq 0$$

が成り立つ。だから、

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq F(\theta) \leq F(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

よって、

$$\frac{2}{\pi} \leq F(\theta) \leq 1, (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

◀

最後に、 C_4 上の積分は

$$\int_{C_4} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_4} \frac{1}{z} dz + \int_{C_4} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz$$

と分けて考える。

まず、第 1 項は変数変換

$$z = \varepsilon e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi, dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$$

を行って

$$\int_{C_4} \frac{1}{z} dz = - \int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = -i\pi$$

となる。

次ぎに第 2 項は関数 $\frac{e^{iz}-1}{z}$ が

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{iz} - 1}{z} \right| &= \left| \frac{(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}) - 1}{z} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{|z|}{2!} + \dots \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} = e^\varepsilon \end{aligned}$$

と評価され、積分 $\int_{C_4} \frac{e^{iz}-1}{z} dz$ は

$$\left| \int_{C_4} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^\varepsilon \varepsilon d\theta = e^\varepsilon \varepsilon \pi \rightarrow 0 (as \varepsilon \rightarrow 0)$$

となる。以上の計算から、

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi = 0$$

で

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

が得られる。◀

例題 5 .

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx, \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

を計算せよ。

(解法) 関数 $f(z) = e^{-z^2}$ を次の積分路で積分する。

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3,$$

$$C_1 = \{Imz = 0, 0 < Rez < R\},$$

$$C_2 = \{|z| = R, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\},$$

$$C_3 = \{z; \arg z = \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < R\},$$

すると C 内では関数 $f(z)$ は正則だから、コーシーの積分定理から

$$\int_C e^{-z^2} dz = 0$$

である。以下で、各積分路 $C_j, j = 1, 2, 3$, 上での積分を考える。

最初に C_1 上では

$$z = x, dz = dx$$

により、

$$\int_{C_1} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} (as R \rightarrow \infty)$$

次ぎに、 C_2 上では

$$z = Re^{i\theta}, 0 < \theta < \frac{\pi}{4},$$

だから、

$$dz = iRe^{i\theta}d\theta,$$

また、

$$z^2 = R^2 e^{2i\theta} = R^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = R^2 \cos 2\theta + i R^2 \sin 2\theta,$$

よって、

$$e^{-z^2} = e^{-R^2 \cos 2\theta} (\cos(R^2 \sin 2\theta) - i \sin(R^2 \sin 2\theta)),$$

従って

$$|e^{-z^2}| = e^{-R^2 \cos 2\theta}$$

だから、

$$|\int_{C_2} e^{-z^2} dz| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \stackrel{(2\theta=\phi)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos \phi} R d\phi \stackrel{(\phi'=\frac{\pi}{2}-\phi)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin \phi'} R d\phi'$$

(例題 4 の不等式 (*) によって)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2}{\pi} \phi} R d\phi = -\frac{\pi}{4R} [e^{-\frac{2R^2}{\pi} \phi}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0 \text{ (as } R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

最後に、 C_3 上では、

$$z = \rho e^{i\frac{\pi}{4}} = \rho (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \rho (\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}), 0 < \rho < R,$$

だから、

$$\begin{aligned} z^2 &= \rho^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = i\rho^2, \\ e^{-z^2} &= e^{-i\rho^2} = \cos \rho^2 - i \sin \rho^2, \end{aligned}$$

また、

$$dz = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)d\rho,$$

よって、

$$\begin{aligned}\int_{C_3} e^{-z^2} dz &= -\int_0^R (\cos \rho^2 - i \sin \rho^2) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\rho \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^R (\cos \rho^2 + \sin \rho^2) d\rho - i\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^R (\cos \rho^2 - \sin \rho^2) d\rho\end{aligned}$$

$$\rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty (\cos x^2 + \sin x^2) dx - i\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty (\cos x^2 - \sin x^2) dx \quad (as \quad R \rightarrow \infty)$$

故に

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty (\cos x^2 + \sin x^2) dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \int_0^\infty (\cos x^2 - \sin x^2) dx &= 0\end{aligned}$$

だから、

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

◀

例題 6 . 関数

$$f(z) = \frac{e^z}{z^{n+1}}$$

を、原点 O を中心として、半径 1 の円周上 (単位円周) C で積分することによって

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin n\theta) d\theta, \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(n\theta - \sin n\theta) d\theta$$

の値を計算せよ。

(解法) 関数 $f(z) = \frac{e^z}{z^{n+1}}$ は原点を $(n+1)$ 位の極としているから、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f, 0] &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} (z^{n+1} \frac{e^z}{z^{n+1}})^{(n)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} e^z = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

また、単位円周上では変数変換

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta), 0 < \theta < 2\pi, \\ dz &= ie^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

を行って、

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z}{z^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos \theta + i \sin \theta}}{e^{i(n+1)\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta + i \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} e^{i(\sin \theta - n\theta)} d\theta \end{aligned}$$

となる。

従って、

$$i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} e^{i(\sin \theta - n\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{n!} i$$

即ち、

$$i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} (\cos(\sin \theta - n\theta) + i \sin(\sin \theta - n\theta)) d\theta = \frac{2\pi}{n!} i$$

を得る。

上の等式の実部及び虚部を等号で結べば

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta - n\theta) d\theta &= \frac{2\pi}{n!}, \\ \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta - n\theta) d\theta &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。

問題 1 . 次の定積分を留数定理を用いて計算せよ。

$$\begin{aligned} & (1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin \theta} d\theta \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 \theta} d\theta \quad (3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx \quad (4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)^2} dx \\ & (5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx \quad (6) \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx \quad (7) \int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x+1} dx \quad (0 < k < 1) \quad (8) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx \end{aligned}$$

2 フーリエ変換

2.1 フーリエ変換 の定義

$-\infty < x_j < \infty, j = 1, \dots, n$ で定義されている関数 (後で、必要な条件は追加する) $f = f(x), x = (x_1, \dots, x_n)$ に対して、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx_1 \dots dx_n$$

を関数 $f(x)$ のフーリエ変換とよび

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx_1 \dots dx_n = F[f](\xi)$$

と書く。ここで、 $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ であり、ベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)$ と $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ との内積を表す。

この場合、全空間での定積分 (広義積分) が収束する為には、例えば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx_1 \dots dx_n < \infty$$

を仮定すれば良い。この条件を満たす関数の集まり (関数空間という) を L^1 空間という。

以後、暫くは関数はこのクラスで考える。

2.2 フーリエ変換 の性質

フーリエ変換の性質を順に挙げておこう。最初に

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F[f](\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi_1 \dots d\xi_n = f(x) \dots (1)$$

が成り立つ。

即ち、

$$\bar{F}[g](x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi_1 \dots d\xi_n$$

とおくと、

$$\bar{F}[F[f]] = f$$

が成立する。

更に、

$$F[\bar{F}[g]] = g$$

も成り立つ。

だから、

$$\bar{F}F = F\bar{F} = I$$

と簡単に書ける。これらの式をフーリエ反転の公式とよぶ。

\bar{F} を逆フーリエ変換と呼ぶ。証明は省略するが、そこで重要な役割をする次の関数 $D^\lambda(x)$ を挙げておこう。

$$D^\lambda(x) = \int_0^\lambda \cos \omega x d\omega$$

この関数 $D^\lambda(x)$ は以下の性質を持つ。

$$(i) D^\lambda(x) = \frac{\sin \lambda x}{x}$$

$$(ii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b D^\lambda(x) dx = \pi, a < 0 < b$$

$$(iii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) D^\lambda(x - \xi) d\xi = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$$

$$(iv) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(x - \xi) d\xi \right) d\omega = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$$

(証明) (i) は容易であり、(ii) は積分変数の変換を行ってから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

を用いれば出来る。(ii) から (iii) は簡単である。(iii) から (iv) は、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

を繰り返し用いて計算すれば出る。(ii) の証明は問題として、挙げておくので、各自で試みておくこと。◀

(注意) 上の関数 $D^\lambda(x)$ で、 $\lambda \rightarrow \infty$ の極限関数 $\delta(x)$ を考える。 $\lim_{x \rightarrow 0} D^\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda x}{x} = \lambda$ だから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \delta(x) = \infty$ が成り立ち、 $x = 0$ 以外の点 x でも極限 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} D^\lambda(x)$ は存在しない。つまり、 $\delta(x)$ は定義出来ない。それでも、 $D^\lambda(x)$ の性質 (ii) 及び (iii) で、形式的に極限 $\lambda \rightarrow \infty$ を取ると、それぞれ

$$(1) \int_a^b \delta(x) dx = \pi, a < 0 < b,$$

$$(2) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = f(x) \text{ (但し、} f(x) \text{ は連続関数)}$$

が成り立つ。前のフーリエ級数の時と同様に、関数 $\frac{\delta(x)}{\pi}$ をデラック関数と呼ぶ。ここでは、デラック関数の近似として、 $D^\lambda(x)$ を考えたことになる。

次の公式は、微分方程式を取り扱う時に、良く用いる。

$$F[f^{(\alpha)}](\xi) = (i\xi)^\alpha F[f](\xi) \dots (2)$$

ここでは、

$$f^{(\alpha)}(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} f(x),$$

$$(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots \alpha_n$$

と書いたが、この表示の仕方を多重指標の方法という。

証明は簡単の為に、1次元で行うが一般にしても同じように出来る。部分積分で、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x) e^{-ix\xi}]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-ix\xi})' dx$$

$$= (i\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

が得られるが、これを繰り返せば良い。

但し、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x) e^{-ix\xi}]_{x=-\infty}^{x=\infty}$ の項に関しては、

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

などの条件を課すことが必要になってくる。

次の性質は証明なしで挙げておく。

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha F[f](\xi) = F[(-ix)^\alpha f](\xi) \dots (3)$$

ここでは、やはり多重指標の表示を使っている。

以下、これまでにしばしば表れたデルタ関数 (δ - 関数) のフーリエ変換を公式として挙げておく。説明は数学的には可成り難解な理論を必要とするので、深入りは避けることにしよう。しかし、工学ではこの関数は良く用いられる。

$$F[\delta] = \bar{F}[\delta] = 1, F[1] = \bar{F}[1] = \delta \dots (4)$$

次に、フーリエ変換と合成積との関係についてラプラス変換の同様な性質が成り立つことに注意しよう。即ち、関係式

$$F[f * g] = \sqrt{2\pi} F[f] F[g]$$

が成立する。ここで、関数 f と g との合成積 $f * g$ は、

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

である。積分の変数変換を行って、

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$$

が成り立つことが容易にわかる。

例題 1 . 関数 $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$) のフーリエ変換を求めよ。

(解法) フーリエ変換の定義に従って計算を行うと、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ix\xi} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-(-a+i\xi)x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{-1}{a+i\xi} [e^{-(a+i\xi)x}]_{x=0}^{x=\infty} + \frac{-1}{-a+i\xi} [e^{-(-a+i\xi)x}]_{x=-\infty}^{x=0} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2 + \xi^2}\end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |e^{-(\pm a + i\xi)x}| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\mp ax} |\cos \xi x - i \sin \xi x| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\mp ax} = 0 \quad (a > 0)$$

を用いた。

ここで、フーリエの反転公式を用いると、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \xi^2} e^{ix\xi} d\xi = e^{-a|x|}$$

を得る。この両辺の実部、虚部をそれぞれ等しいとおくと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\xi}{a^2 + \xi^2} d\xi = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\xi}{a^2 + \xi^2} d\xi = 0$$

を得る。

問題 1 . 次の関数のフーリエ変換を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} \quad (2) f(x) = e^{-a|x|^2}, a > 0 \quad (3) f(x) = \\ &\begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} \\ (4) f(x) &= \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (5) f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

2.3 フーリエ変換の応用

2.3.1 偏微分方程式への応用

数理解析学 1 で採り上げた 1 次元の熱方程式の初期値問題をフーリエ変換を用いて解こう。最初に熱伝導の方程式は次のようであった。観測点 x における t での温度を $u = u(x, t)$ とすると、 $u(x, t)$ の満たす方程式は、

$$u_t = u_{xx} (t > 0, -\infty < x < \infty) \dots (1)$$

である。この方程式の解が初期条件

$$u(x, 0) = \phi(x) \dots (2)$$

を満たすように解くことになる。方程式 (1) の両辺を変数 x についてフーリエ変換し、

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ix\xi} dx$$

とおく。そのときに、関数 $u(x, t)$ の t に関する微分とフーリエ変換における x に関する積分は順序を換えて良いとする。前節の性質を用いると $U(\xi, t)$ についての方程式

$$\frac{dU}{dt} = -\xi^2 U \dots (3)$$

を得る。いま、 ξ をパラメータとみて方程式 (3) を解くと、この方程式は変数分離形なので容易に解けて

$$U(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \Phi(\xi) \dots (4)$$

となる。ここで、 $\Phi(\xi)$ は ξ の任意の関数である。ここで、初期条件 (2) より、 $\Phi(\xi)$ は初期関数 $\phi(x)$ のフーリエ変換である。

ところで、前節の問題 1 (2) から、 $e^{-\xi^2 t} = F\left[\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]$ であり、また前節の合成積に関する性質を用いると、

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * \phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \phi(y) dy \end{aligned}$$

が得られる。

2.3.2 逆ラプラス変換への応用

関数 $f(t) (t > 0)$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

で $t < 0$ では $f(t) = 0$ とし、 $s = \sigma + i\varsigma$ (σ, ς は実数) とおけば、

$$F(\sigma + i\varsigma) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + i\varsigma)t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varsigma t} e^{-\sigma t} f(t) dt$$

ここでフーリエの反転公式を用いると、

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\varsigma) e^{i\varsigma t} d\varsigma$$

従って、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\varsigma) e^{(\sigma + i\varsigma)t} d\varsigma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st} ds \end{aligned}$$

となる。ここで、 $(\sigma, 0)$ を中心として半径 R (十分に大きい) の円を描き、この円の直径 C_1 ($Re(z) = \sigma, -R < Im(z) < R$) と左半円 C_2 ($|z - \sigma| = R, Re(z) < \sigma$) とで囲まれた領域内に含まれる関数 $F(s)$ の特異点を $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$ とする。もしも $\int_{C_2} F(s) e^{st} ds \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$ が成り立てば、留数定理から

$$f(t) = \sum_1^n Res[F(s) e^{st}, a_k]$$

となる。

例・ $\frac{s}{s^2 + a^2}$ の逆ラプラス変換を求める。

(解法)・円内の特異点は $z = \pm ia$ でこの点での留数 $Res[\frac{s}{s^2 + a^2} e^{st}, \pm ia]$ は、

$$\begin{aligned} Res[\frac{s}{s^2 + a^2} e^{st}, \pm ia] &= \lim_{s \rightarrow \pm ia} \frac{s(s \mp ia)}{s^2 + a^2} e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm ia} \frac{s}{(s \pm ia)} e^{st} \\ &= \frac{\pm ia}{\pm 2ia} e^{\pm iat} \end{aligned}$$

よって、

$$f(t) = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat}) = \cos at$$

問題 2 . 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ。

$$(1) \frac{a}{s^2+a^2} \quad (2) \frac{1}{(s-a)^2} \quad (3) \frac{s}{(s^2+a^2)^2} \quad (4) \frac{a}{(s^2+a^2)^2} \quad (5) \frac{s}{(s^2+a^2)^n} \quad (6) \frac{a}{(s^2+a^2)^n}$$