

正の数 a, b について相加平均・相乗平均の関係とは

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

の不等式のことである。この有名な不等式について各辺の意味を考え、不等式自身をより一般に扱ってみよう。

n 個の正の数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ が与えられたとき

相加平均	$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$
相乗平均	$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$
調和平均	$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

と定めることにする。

問 1. ”相加平均”, ”相乗平均”, ”調和平均” と名前を付けるからには, それぞれに適した用途があるはずである。3 つの平均それぞれについて用途の例を挙げ, 各々の平均の利点や特徴を説明せよ。

問 2. 実は上で記した 2 変数の場合と同様に ”相加平均 \geq 相乗平均 \geq 調和平均” の関係がいつも成立している。これを証明せよ。