1　ベクトル解析

1.1　ベクトルの内積と外積

1.1.1　内積

2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との内積 $(\vec{a},\vec{b})$(または、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書く）を次ぎのように定義する。

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, (\theta\text{はベクトル}\vec{a}\text{と}\vec{b}\text{の間に角})$$

その時に、交換法則、分配法則等が成り立つ。

$$(1)(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a}), (\text{交換法則})$$
$$(2)(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c}), (\text{分配法則})$$
$$(3)m(\vec{a},\vec{b}) = (m\vec{a},\vec{b}), (m\text{ はスカラー})$$

また、各ベクトルがそれぞれ $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3), \vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ のときには、内積は次の式で計算できる。

$$(4)(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

この性質は、性質 (1),(2) と $(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k}) = 1, (\vec{i},\vec{j}) = (\vec{j},\vec{k}) = (\vec{k},\vec{i}) = 0$ からわかる。

内積の性質は次である。

$$(i)\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 0$$
$$(ii)(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$$
$$(iii)|(\vec{a},\vec{b})| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \,(\text{シュワルツの不等式})$$

1.1.2　外積

2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との外積 $\vec{a}\times\vec{b}$(または、$[\vec{a},\vec{b}]$ と書く）を次ぎのように定義する。

定義 1 *(i)*$\vec{a}$ と $\vec{b}$ とが平行のとき、$\vec{a}\times\vec{b} = 0$、*(ii)*$\vec{a} = 0$ また $\vec{b} = 0$ のときは、$\vec{a}\times\vec{b} = 0$、*(iii)*0 でなく、平行でもない *2*つのベクトルの $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との外積は次のように決める。（1）大きさは、ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とで作る平行

四辺形の面積 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$（$\theta$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の間に角）に等しい。（２）方向と向きは、ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とに垂直で $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ネジを廻すときにネジの進む方向。

その時に、次の分配法則等が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(1)\vec{a}\times\vec{b} &= -\vec{b}\times\vec{a}, \vec{a}\times\vec{a} = 0 \\
(2)\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \\
(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} &= \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}, \text{(分配法則)} \\
(3)(m\vec{a})\times\vec{b} &= m(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(m\vec{b}), m\text{ はスカラー)}
\end{aligned}
$$

また、各ベクトルがそれぞれ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のときには、外積は次の式で計算できる。

$$
\begin{aligned}
(4)\vec{a}\times\vec{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= (\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})
\end{aligned}
$$

この計算は、上の性質 (1),(2) と、$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$ から出る。

従って、外積は行列式を用いて、形式的に

$$
(4)'\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
$$

と書くことが出来る。

1.2　ベクトルの微分と積分

点 P が（時間）変数 t の変化にともなって連続的に動いて１つの曲線を描くとき、点の位置ベクトル $\vec{r}$ は、$\vec{r} = \vec{r}(t)$ と表される。この式を曲線のベクトル方程式といい、t を媒介変数（パラメター）とよぶ。このように、一般にベクトル $\vec{A}$ の各成分がそれぞれ実数 t の関数であるとき、つまり、$\vec{A} = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とかけるときに、$\vec{A} = \vec{A}(t)$ と書き、ベクトル $\vec{A}(t)$ の微分、積分をそれぞれ次のように定義する。

$$
\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = (\frac{da_1(t)}{dt}, \frac{da_2(t)}{dt}, \frac{da_3(t)}{dt}),
$$

$$\int \vec{A}(t)dt = (\int a_1(t)dt, \int a_2(t)dt, \int a_3(t)dt)$$

この時に、次の性質は明らかであろう。

$$(1)\frac{d(\vec{A}(t)+\vec{B}(t))}{dt} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} + \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

$$(2)\frac{d(\phi(t)\vec{A}(t))}{dt} = \frac{d\phi(t)}{dt}\vec{A}(t) + \phi(t)\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

$$(3)\frac{d(\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t))}{dt} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\cdot\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\cdot\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

$$(4)\frac{d(\vec{A}(t)\times\vec{B}(t))}{dt} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\times\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\times\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

$$(5)\frac{d|\vec{A}(t)|^2}{dt} = 2\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\cdot\vec{A}(t)$$

$$[1]\int(\vec{A}(t)+\vec{B}(t))dt = \int\vec{A}(t)dt + \int\vec{B}(t)dt$$

$$[2]\int\phi(t)\vec{A}'(t)dt = \phi(t)\vec{A}(t) - \int\phi'(t)\vec{A}(t)dt$$

$$[3]\int\vec{A}(t)\cdot\vec{B}'(t)dt = \vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t) - \int\vec{A}'(t)\cdot\vec{B}(t)dt$$

$$[4]\int\vec{A}(t)\times\vec{B}'(t)dt = \vec{A}(t)\times\vec{B}(t) - \int\vec{A}'(t)\times\vec{B}(t)dt$$

また、点 P が 2 つの変数 u, v の変化にともなって連続的に動いて 1 つの曲面を描くとき、点の位置ベクトル $\vec{r}$ は、$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ と表される。この式を曲面のベクトル方程式といい、u, v を媒介変数（パラメター）とよぶ。このように、一般にベクトル $\vec{A}$ の各成分がそれぞれ実数 u, v の関数であるとき、つまり、$\vec{A} = (a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v))$ とかけるときに、$\vec{A} = \vec{A}(u, v)$ と書く。ベクトル関数 $\vec{A}(u, v)$ の偏微分や重積分も同様に定義する。

さて、話を曲線のベクトル方程式に戻そう。

1.2.1 曲線

まず、次の事実が成り立つ。

定理 2 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と表された曲線の上の点 $P(t = a)$ から $Q(t = b)$ 迄の曲線の長さ s は次の式で与えられる。

$$s = \int_a^b |\vec{r}'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

従って、

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

また、曲線 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 上の各点 P での微分係数 $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ は、点 P で元の曲線に接する。つまり、$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ はこの曲線の接線方向のベクトルである。このベクトルを**接線ベクトル**とよぶ。この時に、次は明らかであろう。

定理 3 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ と表された曲線の上の点 P における単位接線ベクトル $\vec{t}$ は次で与えられる。

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}|} = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds}$$

例題１． 曲線 $\vec{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ について、単位接線ベクトル、曲線の長さを求めよ。

（解法）

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-3\sin t, 3\cos t, 4)$$

だから、

$$|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}| = \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 16} = 5,$$

よって、単位接線ベクトル $\vec{t}$ は,

$$\vec{t} = \frac{1}{5}(-3\sin t, 3\cos t, 4).$$

また、曲線の長さは、

$$s = \int_0^t |\vec{r}'(t)|dt = \int_0^t 5|dt = 5t.$$

◀

1.2.2 曲面

方程式が $z = f(x,y)$ で与えられる曲面上 S の点 P について、ベクトル $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}$ は、$\overrightarrow{r} = (x, y, f(x,y))$ と表される。一般に、曲面 S 上の点 P について、ベクトル $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}$ が、2つのパラメター u, v を用いて $\overrightarrow{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と表される場合を考えよう。曲面 S 上の点 $P(u=c, v=d)$ で2つの変数 u, v のうち例えば u(resp.v) を固定しておき、$\vec{r} = \vec{r}(c,v)$（resp.$\vec{r}(u,d)$）を考えるとこれは v（resp.u）だけの関数だから、空間の中の点 P を通る1つの曲線を表す。これを、v 曲線（resp.u 曲線）という。前節の結果から、$\frac{\partial\vec{r}(c,d)}{\partial v}$(resp.$\frac{\partial\vec{r}(c,d)}{\partial u}$) は v 曲線（resp.u 曲線）の点 P での接線ベクトルを表す。$\frac{\partial\vec{r}(c,d)}{\partial v}$ と $\frac{\partial\vec{r}(c,d)}{\partial u}$ との外積 $\frac{\partial\vec{r}(c,d)}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}(c,d)}{\partial v}$ を考えるとこのベクトルは v 曲線及び u 曲線の接線ベクトルに垂直だから、v 曲線及び u 曲線の接線ベクトルで生成される平面にも垂直で、従って点 P での接平面に垂直になっている。この方向を曲線の**法線方向**とよぶ。次が成り立つ。

定理 4 $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 上の単位法線ベクトル $\vec{n}$ は次で与えられる。

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|}$$

次は空間の曲面積を計算で求める式である。

定理 5 点 $P(u,v)$ が平面上のある領域 D を動くとき、これに対応する曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ の面積 S は次で与えられる。

$$S = \int\int_D |\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}| du dv$$

例題2. 半径 a の球について、単位法線ベクトル $\vec{n}$, 面積 S を求めよ。
（解法） 半径 a の球上の点は

$$\vec{r}(u,v) = (u, v, \pm\sqrt{a^2 - u^2 - v^2})$$

と書ける。これより、

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = (1, 0, \frac{\mp u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}), \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = (0, 1, \frac{\mp v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}})$$

従って,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (\pm\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, \pm\frac{v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, 1).$$

だから、

$$|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}| = \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}$$

よって、

$$\vec{n} = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (\pm\frac{u}{a}, \pm\frac{v}{a}, \frac{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}{a}).$$

また、

$$S = \int\int_D |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}| dudv = 8\int\int_D \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} dudv$$

ここで $D = \{(u,v); u^2+v^2 \le a^2, u \ge 0, v \ge 0\}$. この積分は極座標に変数変換して、

$$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta,$$

$$D' = \{(r,\theta); 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le a\}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} u_\theta & v_\theta \\ u_r & v_r \end{vmatrix} = r$$

だから、

$$S = 8\int\int_D \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} dudv$$

$$= 8\int\int_{D'} \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}} r dr d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}} r dr d\theta$$

$$= -8a \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{a^2-r^2}]_{r=0}^{r=a} d\theta = 4\pi a^2$$

◀

1.3　スカラー場とベクトル場

1.3.1　スカラー場の勾配

空間のある領域にスカラー関数が定義されているときに、それを、**スカラー場**という。例えば、物質の質量、温度、圧力などの分布はその例である。また、空間のある領域にベクトル関数が定義されているときに、それを、**ベクトル場**という。例えば、速度、電場、磁場の分布などがその例である。以後、定義されている範囲（定義域）V を、スカラー関数を ϕ、ベクトル関数を $\vec{A}$ などで表す。

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ に対して、ベクトル関数 (ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z) をスカラー関数 $\phi(x,y,z)$ の**勾配**といい、$grad(\phi)$（グラヂュエント ϕ と読む）と表す。いま、∇(ナブラと読む）を記号で、$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ とかき、作用素を成分とするベクトルと考えると、

$$\nabla\phi=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\phi=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})=grad(\phi)$$

である。このように、考えた ∇ を**ハミルトンの演算子**という。

ベクトル関数 $\vec{A}(x,y,z)$ があるスカラー関数 $\phi(x,y,z)$ を用いて、$\vec{A}(x,y,z)=-\nabla\phi$ と書ける時に、ベクトル関数 $\vec{A}(x,y,z)$ はスカラーポテンシャル $\phi(x,y,z)$ を持つという。

$grad\phi$ の意味は次の主張の通りである。

定理 6 スカラー場 $\phi(x,y,z)$ の勾配 $grad(\phi)$ は、等位面 $\phi(x,y,z)=c$ の法線方向を与える。つまり、等位面 $\phi(x,y,z)=c$ の単位法線ベクトル $\vec{n}$ は、

$$\vec{n}=\frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla\phi$$

で与えられる。

問題１．次を計算せよ。（１）∇r(2)$\nabla\log r$（３）$\nabla(\frac{1}{r})$、但し $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

1.3.2　ベクトル場の発散

ベクトル関数 $\vec{A}(x,y,z)=(a(x,y,z),b(x,y,z),c(x,y,z))$ に対して、スカラー関数 $\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}$ をベクトル関数 $\vec{A}(x,y,z)$ の**発散**といい、$div\vec{A}$

（ダイバージエンスと読む）と表す。前節で定義した ∇ を用いて、

$$divA\vec{A} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$$

とかける。ここで、前と同じように $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ は作用素を成分とするベクトルと考えており、$\nabla \cdot \vec{A}$ の内積は、$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$ であるが各項の積を $\frac{\partial}{\partial x} a$ のように読むことにしている。

(注意) 上のように読む時に、内積 $\vec{A} \cdot \nabla$ は、$\vec{A} \cdot \nabla = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$ と解釈されて、これはスカラー関数 $f(x, y, z)$ に作用する作用素である。だから、$\nabla \cdot \vec{A} \neq \vec{A} \cdot \nabla$ である。

いま、$\vec{A}(x, y, z)$ が流体の速度を表すベクトルであるとして、$div\vec{A}$ の物理的な意味は、各点における単位体積から流れる流体の湧き出す量を表す。例えば、位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ は原点から放射状に出ていくべくトルであり、原点から遠いほど大きさが増していき、その発散は $div\vec{r} = 1+1+1 = 3$ であり、一定である。このように、湧き出し量が一定の場合、**ソレノイド**という。

問題２．次を計算せよ。（１）$\nabla \cdot (\frac{\vec{r}}{r})(2)\nabla \cdot (\frac{\vec{r}}{r^2})$（３）$\nabla \cdot (\frac{\vec{r}}{r^3})$ 但し、$\vec{r} = (x, y, z), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1.3.3 ラプラス作用素と回転

スカラー場 $\phi(x, y, z)$ に対して $\nabla\phi = (\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z})$ はベクトル関数であり、その発散（div）が意味を持つ、計算すると、

$$\nabla \cdot \nabla\phi = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

となる。このとき、

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

とおいて、これを**ラプラス演算子**（ラプラシアンと読む）という。

従って、

$$div(grad(f)) = \triangle f$$

が成り立つ。

$$\triangle f = 0$$

を満たす関数を**調和関数**という。

問題３．次を計算せよ。（１）$\triangle r$(2)$\triangle \log r$（３）$\triangle(\frac{1}{r})$

次に、ベクトル関数の回転を定義する。

ベクトル場 $\vec{A}(x,y,z) = (a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z))$ に対して、ベクトル関数 $(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y})$ を $\vec{A}$ の**回転**といい、$rot\vec{A}$（ローテーションと読む）と表す。ハミルトンの演算子を用いて ∇ と $\vec{A}$ との外積 $\nabla \times \vec{A}$ を形式的に計算すれば、

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z)) \\ &= (\frac{\partial}{\partial y}c - \frac{\partial}{\partial z}b, \frac{\partial}{\partial z}a - \frac{\partial}{\partial x}c, \frac{\partial}{\partial x}b - \frac{\partial}{\partial y}a) \\ &= (\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y})\end{aligned}$$

であるから、

$$rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

と表すことができる。

また、行列式の記号を用いて、

$$rot\vec{A} = (\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ c & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a & b \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

とも書ける。

次の主張が成り立つ。

定理 7 ベクトル関数 $\vec{A}(x,y,z)$ がスカラーポテンシャル $\phi(x,y,z)$ を持つ時には、つまり $\vec{A}(x,y,z) = -\nabla\phi$ と書ける時には、$rot\vec{A} = 0$ が成り立つ。

理由は、$rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (-\nabla\phi) = 0$ だからであるが、この主張の逆は正しい。

同じように、ベクトル関数 $\vec{A}(x,y,z)$ があるベクトル関数 $\vec{B}(x,y,z)$ を用いて、$\vec{A} = rot\vec{B}$ と書ける時にベクトル関数 $\vec{A}(x,y,z)$ がベクトルポテンシャル $\vec{B}(x,y,z)$ を持つという。この時に、次が成り立つ。

定理 8 ベクトル関数 $\vec{A}(x,y,z)$ がベクトルポテンシャル $\vec{B}(x,y,z)$ を持つ時には、つまり $\vec{A}(x,y,z) = rot\vec{B}(= \nabla \times \vec{B})$ と書ける時には、$div\vec{A} = 0$ が成り立つ。

理由は $div\vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$ だからであるが、この主張の逆も正しい。

1.4 線積分、面積分と体積分

1.4.1 線積分

空間内に、始点P、終点Qであるような曲線$C:\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))(a\leq t\leq b)$が与えられているとする。曲線$C$上で定義されたスカラー関数$f(x,y,z)$に対して、積分

$$\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))dt$$

を**媒介変数**t**に関する曲線**C**に沿った線積分**といい、簡単に

$$\int_C fdt$$

と書く。

特に、媒介変数が弧の長さsのときには、曲線$C:\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))(a\leq t\leq b)$に沿った線積分は、

$$\int_C fds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\frac{ds}{dt}dt$$

$$=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

となるが、この線積分を単に、**曲線**C**に沿った線積分**という。

例題３． 関数

$$f=x^2-2yz+y$$

の次の２つの直線C_1,C_2に沿っての線積分を計算せよ。

(1)

$$C_1:\text{点}\,(1,1,0)\rightarrow\text{点}\,(1,1,1)$$

に至る直線

(2)

$$C_2:\text{点}\,(0,0,0)\rightarrow\text{点}\,(1,1,1)$$

に至る直線

（解法）

(1)C_1は

$$x=1,y=1,z=s,0\leq s\leq 1,$$

と書けるから、この上で

$$f = x^2 - 2yz + y = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot s + 1 = 2 - 2s$$

となる。従って、C_1 に沿っての線積分は

$$\int_0^1 (2-2s)ds = [2s - s^2]_{s=0}^{s=1} = 1$$

である。

(2)C_2 は

$$x = \frac{s}{\sqrt{3}}, y = \frac{s}{\sqrt{3}}, z = \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \leq s \leq \sqrt{3}$$

と書けるから、この上で

$$f = x^2 - 2yz + y = (\frac{s}{\sqrt{3}})^2 - 2\frac{s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{s}{\sqrt{3}} = -\frac{s^2}{3} + \frac{s}{\sqrt{3}},$$

となる。従って、C_2 に沿っての線積分は

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} (-\frac{s^2}{3} + \frac{s}{\sqrt{3}})ds &= [-\frac{s^3}{9} + \frac{s^2}{2\sqrt{3}}]_{s=0}^{s=\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}^3}{9} + \frac{\sqrt{3}^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

（別解） C_2 は

$$x = t, y = t, z = t, 0 \leq t \leq 1, \frac{ds}{dt} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

と書け、またこの上で

$$f = x^2 - 2yz + y = t^2 - 2t \cdot t + t = -t^2 + t$$

となる。従って、C_2 に沿っての線積分は

$$\int_0^1 (-t^2 + t)\sqrt{3}dt = \sqrt{3}[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

◀

次に、曲線 $C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))(a \leq t \leq b)$ 上で定義されたベクトル関数 $\vec{A}(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$ の線積分を次のように定義する。まず、曲線 C を弧の長さを用いて $C : \vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))(\alpha \leq$

$t \leq \beta)$ と表示しておく。次に曲線 C 上の点における単位接線ベクトル $\vec{t} = \vec{r}'(s)$ を考えてベクトル関数 $\vec{A}$ と単位接線ベクトル $\vec{t}$ との内積 $\vec{A}\cdot\vec{t}$（スカラー関数）を上の定義に従って、線積分

$$\int_C \vec{A}\cdot\vec{t}ds$$

を計算する。これを、**ベクトル関数$\vec{A}$ の曲線C 上の線積分**という。曲線 C がパラメター t を用いて $C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))(a \leq t \leq b)$ と表示されているときには、

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

であったから、上の積分は

$(i)C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))(a \leq t \leq b)$ と表示されているときには、

$$\int_C \vec{A}\cdot\vec{t}ds = \int_a^b \vec{A}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}ds = \int_a^b \vec{A}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt =$$

$$\int_a^b (a(x(t), y(t), z(t))\frac{dx(t)}{dt} + b(x(t), y(t), z(t))\frac{dy(t)}{dt} + c(x(t), y(t), z(t))\frac{dz(t)}{dt})dt$$

$(ii)C : \vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))(\alpha \leq s \leq \beta)$ と表示されているときには、

$$\int_C \vec{A}\cdot\vec{t}ds =$$

$$\int_\alpha^\beta (a(x(s), y(s), z(s))\frac{dx(s)}{ds} + b(x(s), y(s), z(s))\frac{dy(s)}{ds} + c(x(s), y(s), z(s))\frac{dz(s)}{ds})ds$$

となる。

例題４． 関数

$$\vec{A} = (x + 2y - z, 2x + y, -y - 2z)$$

の直線

$$C; \text{点 } (1, 0, 1) \to \text{点 } (1, 1, 1) \text{ に至る直線}$$

に沿っての線積分を計算せよ。

（解法） C は

$$x = 1, y = s, z = 1, 0 \leq s \leq 1$$

と書けるから、

$$\vec{t} = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}) = (0, 1, 0),$$

$$\vec{A} = (1 + 2s - 1, 2 + s, -s - 2),$$

$$\vec{A} \cdot \vec{t} = 2 + s,$$

$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{t} ds = \int_0^1 (2 + s) ds = [2s + \frac{s^2}{2}]_0^1 = \frac{5}{2}$$

◀

例題５． 曲線

$$C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)(0 \leq t \leq \pi)$$

に沿ったスカラー関数

$$\phi = 2xz$$

及びベクトル関数

$$\vec{A} = (-y, x, z)$$

の線積分を計算せよ。

*(*解法）

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t$$

だから、

$$\phi = 2xz = 2t \cos t,$$

$$\vec{A} = (-y, x, z) = (-\sin t, \cos t, t),$$

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cot t, 1)$$

故に、

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t)| dt, \frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$$

によって、

$$s'(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},$$

$$\int_C \phi ds = \int_0^\pi 2t \cos t \cdot \sqrt{2} dt$$

$$= 2\sqrt{2}\{[t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t dt\}$$

$$= -2\sqrt{2} \times [\cot s]_0^\pi = -4\sqrt{2}$$

また、

$$\int_C \vec{A}\cdot\vec{t}ds = \int_C \vec{A}\cdot\vec{r}'dt$$

$$= \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t + t)dt$$

$$= \int_0^\pi (1+t)dt$$

$$= [t + \frac{t^2}{2}]_0^\pi = \pi + \frac{\pi^2}{2}$$

◀

問題４．曲線 $C; \vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)(0 \leq t \leq 2\pi)$ スカラー関数 $\phi = x^2 + z$ 及びベクトル関数 $\vec{A} = (x, y, z)$ に対して以下に答えよ。

（１）曲線 C の単位接線ベクトル、点 $P(t=0)$ から点 $P(T=t)$ 迄の曲線の長さを求めよ。

（２）関数 ϕ の曲線 C 上の線積分を計算せよ。

（３）関数 $\vec{A}$ の曲線 C 上の線積分を計算せよ。

1.4.2 面積分

曲面 S のベクトル方程式を $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ とし、点 (u, v) が $u-v$ 平面のある領域 D を動くとき S 上でのスカラー関数 $\phi = \phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = \phi(u, v)$ に対して、二重積分

$$\int\int_D \phi(u,v)|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|dudv$$

を曲面 S 上のスカラー関数の面積分といい、

$$\int\int_S \phi dS$$

と表す。

特に、曲面 S が $z = z(x, y)$ で表されているときには、

$$|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1},$$
$$\phi = \phi(x, y, z(x, y))$$

が成り立つので、

$$\int\int_D \phi(u, v)|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|dudv =$$

$$\int\int_D \phi(x, y, z(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy$$

となる。

次に、S 上でのベクトル関数 $\vec{A}(u, v) = (a(x, y, z), b(x, y, z), b(x, y, z)), x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ に対して、

$$\int\int_S \vec{A} \cdot \vec{n}dS = \int\int_D \vec{A} \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v})dudv$$

を曲面 S 上のベクトル関数 $\vec{A}$ の**面積分**という。

例題６． 関数

$$\vec{A} = (0, 0, z)$$

の

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

上での面積分を計算せよ。

（解法） S 上のベクトル $\vec{r}$ は

$$\vec{r} = (x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

だから、

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, \mp\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}), \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (1, 0, \mp\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}})$$

よって、

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (\pm\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \pm\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1)$$

である。以下

$$D=\{(x,y);x^2+y^2\leq 1\}$$

と置いて、

$$\begin{aligned}\int\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS &= \int\int_D \vec{A}\cdot\vec{n}|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}|dxdy \\ &= \int\int_D \vec{A}\cdot\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}}{|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}|}|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}|dxdy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int\int_D \vec{A}\cdot(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y})dxdy \\ &= \int\int_D zdxdy \\ &= 2\int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}rdrd\theta \\ &= 4\pi[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}]_{r=0}^{r=1} \\ &= \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

となる。途中の計算では極座標を用いた。◀

例題７． 曲面

$$S:\vec{r}=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u),(0\leq u\leq\frac{\pi}{2},0\leq v\leq 2\pi)$$

上のベクトル関数

$$\vec{A}=(xz,yz,0)$$

の面積分を計算せよ。

(解法)

$$x=\sin u\cos v,y=\sin u\sin v,z=\cos u,$$

だから、

$$\vec{A}=(xz,yz,0)=\cos u(\sin u\cos v,\sin u\sin v,0),$$

また、

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,-\sin u),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0),$$

よって、

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \sin u(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u),$$

そして、

$$\vec{A} \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}) = \sin^3 u \cos v,$$

だから、

$$\int\int_D \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int\int_D \vec{A} \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}) dudv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u \cos v dudv = \frac{\pi}{2}$$

◀

（注意） 上の例題の曲面 S は

$$x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = \cos u$$

とおいて、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \\ &= \sin^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるから、中心が原点 $O(0,0,0)$, 半径 1 の球面の一部を表す。一般に、空間で、

$$x = r \sin u \cos v, y = r \sin u \sin v, z = r \cos u$$

と置いて、点 $P(x,y,z)$ を (r,u,v) で表すことを、球面座標による表示という。ここで、r は原点 O から点 P への距離であり、u は OP と z 軸の正の方向とのなす角であり、v は点 P から $x-y$ 平面に下ろした垂線の足を H として、OH と x 軸の正の方向とのなす角である。従って、

$$r > 0, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 2\pi$$

である。

問題５． １．曲面 $S;\vec{r} = (a\cos u\sin v, a\sin u\sin v, a\cos v)(0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq u \leq 2\pi)$ スカラー関数 $\phi = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ 及びベクトル関数 $\vec{A} = (x, y, z)$ に対して以下に答えよ。

（１）曲面 S の単位法線ベクトル $\vec{n}$、曲面の面積 σ を求めよ。

（２）関数 ϕ の曲面 S 上の面積分を計算せよ。

（３）関数 $\vec{A}$ の曲面 S 上の面積分を計算せよ。

２．平面 $S; 2x + 2y + z = 2$ 及びベクトル関数 $\vec{A} = (x + y, x + y, -2z)$ に対して以下に答えよ。

（１）曲面 S を表すベクトル方程式 $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ を求め、平面の単位法線ベクトルを求めよ。

（２）関数 $\vec{A}$ の曲面 S 上の面積分を計算せよ。

３．曲線 $C;\vec{r} = (\cos t, \sin t, 1), (0 \leq t \leq 2\pi)$ 及びベクトル関数 $\vec{A} = (2z, -z-3, xy)$ に対して以下に答えよ。

（１）曲線 C の単位接線ベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

（２）関数 $\vec{A}$ の曲線 C 上の線積分を計算せよ。

（3）閉曲線 C を境界とする任意の曲面を S とする。面積分 $\int\int_S rot(\vec{A})\cdot\vec{n}dS$ を計算せよ。（**岐阜大学大学院電気電子工学専攻**）

1.5　ガウスの発散定理

閉曲面で囲まれた領域における体積積分は平面上の通常の二重積分のように定義する。次の定理はガウスの発散定理とよばれ重要である。

定理 9 閉曲面 S で囲まれた領域 V をとし、S の単位法線ベクトルを $\vec{n}$ とする。ベクトル関数 $\vec{A}$ に対して

$$\int\int\int_V div\vec{A}dV = \int\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS$$

が成り立つ。

上の定理で $\vec{A} = gradf$ とおけば、直ぐに次の定理がわかる。

定理 10 スカラー関数 f の法線方向への微分を $\frac{\partial f}{\partial n}$ とすると、

$$\int\int\int_V \triangle f dV = \int\int_S \frac{\partial f}{\partial n}dS$$

特に、f が調和関数ならば、$\triangle f = 0$ だから、

$$\int\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$$

が成り立つ。

次の幾つかの公式は上の定理から簡単に導くことができる。

$$(i) \int\int\int_V (g \triangle f + \nabla g \cdot \nabla f) dV = \int\int_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$$
$$(ii) \int\int\int_V (g \triangle f - f \triangle g) dV = \int\int_S (g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n}) dS$$

また、次の平面における**グリーンの定理**も有用である。

$$\int\int_D (f_x - g_y) dx dy = \int_C (g dx + f dy)$$

最後に**ストークスの定理**をあげておこう。

$$\int\int_S rot\vec{A} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{t} ds = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ここで、S は空間内の曲面で、C は S の境界を表す閉曲線であり、$\vec{n}$ は曲面 S 上での単位法線ベクトルである。また、ベクトル関数 $\vec{A}$ は S 上で定義されており、C の向きは正とする。左辺は S 上のベクトル関数 $rot\vec{A}$ の面積分を表し、右辺は C に沿ったベクトル関数 $\vec{A}$ の線積分を表す。

問題６． １．円柱面 $S; \vec{r} = (\cos u, \sin u, v), (0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 1)$ 上でのベクトル関数 $\vec{A} = (z, x, y)$ の面積分の値を計算せよ。

２．閉曲面 S で囲まれた立体を V とする。原点 O が V の外部にあるときに、等式 $\int_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = 0$ を証明せよ。但し、$\vec{n}$ は曲面 S の外向き単位法線ベクトル。