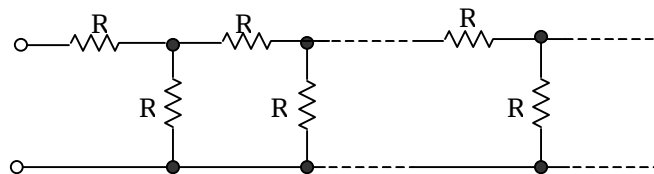
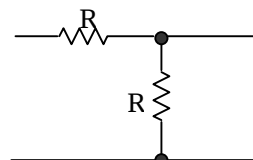


（問題）下の図のように全て同じ大きさ（ $R[\Omega]$ ）の抵抗が、はしご型に接続されている。この抵抗回路が無限段に接続されている時、左端の端子間から見た抵抗を求めなさい。

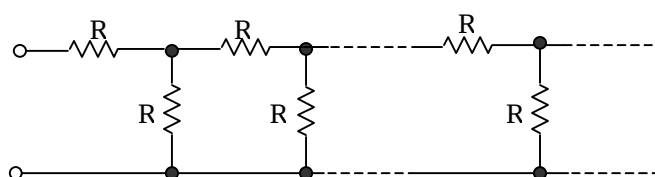


解答例：

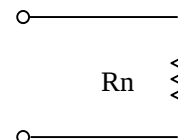
上の回路は、逆L字型の二つの抵抗が接続された回路が、繰り返した段接続されているものとみなす事ができる。



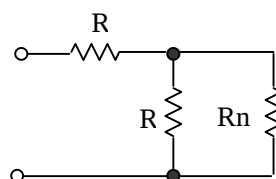
n 段の逆 L 字型の抵抗回路が接続されている時、左端から見た抵抗が R_n であるとする。



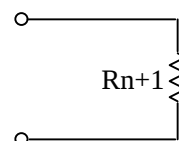
$\equiv$



この回路に、さらに一段接続し $n+1$ 段とする時、この回路を左から見た抵抗は、 R_{n+1} になる。



$\equiv$



上の関係を式で表すと、次のようになる。

$$R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_n}} = R_{n+1}$$

$$\therefore R_{n+1} = R + \frac{RR_n}{R + R_n}$$

ここで、無限段に接続した時には、 $n \rightarrow \infty$ となる。このとき、 $R_n \rightarrow R_{n+1}$ となる。 $R_n = x$ とおくと、上の式は次のようになる。

$$x = R + \frac{Rx}{R + x}$$

$$(x - R)(x + R) = Rx$$

$$x^2 - Rx - R^2 = 0$$

$$x = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} R$$

ここで、求める抵抗 x は、正の値でなければならない。

従って、無限段に接続された時の左側から見た抵抗の値は、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}R$ [Ω] となる。

補足：

実際に計算機を使って、上の R_n の値が一定の値に近づいていくかを求めてみる。逆 L 字型回路が一段の時の抵抗 R_1 は、明らかに $2R$ [Ω] である。すると、次の関係を満たす R_n と R_{n+1} を、順に求めていけばよい。

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{n+1} = R + \frac{RR_n}{R + R_n} \\ R_1 = 2R \end{array} \right. \quad \text{両辺を } R \text{ で割ると、} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_{n+1}}{R} = 1 + \frac{\frac{R_n}{R}}{1 + \frac{R_n}{R}} \\ \frac{R_1}{R} = 2 \end{array} \right.$$

ここでは、表計算ソフト Excell を使った例を示す。

n	Rn/R
1	2.000000
2	1.666667
3	1.625000
4	1.619048
5	1.618182
6	1.618056
7	1.618037
8	1.618034
9	1.618034
10	1.618034

$\frac{R_\infty}{R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618034$ であるので、10段のはしご型回路が接続されると、ほぼ一定の値に近づいて（収束して）いる事が分かる。 $n \rightarrow \infty$ の時には、 $R_n \rightarrow R_\infty$ かつ $R_{n+1} \rightarrow R_\infty$ となるので、つまり、 $R_n \rightarrow R_{n+1}$ となる。

ここで、Excell の計算式は、例えば B2 のセルに 2 が入力されている時には、B3 のセルに $=1+B2/(1+B2)$ という計算式を記入し、その式を B4 より下のセルにコピーすればよい。