

電気電子基礎 （電子情報工学科 第二学年） 授業ノート

鈴鹿高専・電子情報工学科 伊藤 明

<はじめに>

高専の2年生で『電気電子基礎』という科目を、昨年度（平成 14 年度）から新たに担当する事になりました。自分が思うベストな教科書が見当たらなかったため、今年度新たなテキストを選び、授業テキストとして使います。¹ しかし、このテキストは原理をあまり細かく説明してくれないという“消化不良”の間がぬぐえない印象があります。まだ数学や物理で専門の基礎をあまりまだ習っていない高専の2年生の皆さんにとっては、分かりにくい所が多いかと思います。実際の授業は、私が自分で作ったノートを中心に行おうと考えています。²

この文章は、昨年度に引き続きインターネットの私のホームページ上に載せておきますので、皆さん随時読んでください。講義の内容・解説や、小テスト・定期テストの解答例などを載せる予定です。また、授業中や放課後に受けた質問も載せていくつもりです。2年生の皆さんにとって、授業を理解するための補助用教材として利用される事を望みます。高専2年生以上（例えば、3年生）の学生さんにとっては、既に勉強した範囲なのにしっかり理解していなかった部分の復習用教材としても利用できるかもしれません。

あらかじめ謝っておきますが、忙しさにかまけて内容の更新が直ぐにはできないと思います。実際、昨年度は完成を見ず未完のまま、今年度も手を加え始めたのがこの9月1日です。今年度こそは、できるだけ完成に近づけるつもりでいます。

1 授業テキスト：『電気回路テキスト』、瀬谷浩一郎、出版：日本理工出版会

2 注意：(このページを印刷して、講義は聴かなくてもいいなどとくれぐれも思わないで下さい。ここに載せるのは、あくまでも私が授業の前に作ることができる量だけのメモ程度です。授業中に、もっとたくさん、もっと分かりやすく(?)説明しますから聞き漏らさないようにして下さい。)

<目次>

<はじめに>	1
<目次>	2
1. 授業の内容	5
(主な内容： 二つの柱)	5
(全ての基礎)	5
(繰り返しが大切： 小テストも成績に加算)	5
(わかってから解くか、解いてからわかるか?)	6
(前期末試験終了後の成績不振者に対する補習)	6
2. 授業	7
<電気数学の基礎>	7
2. 1 第1, 2週 三角関数の諸性質. (展開公式、三角関数の合成)	7
三角関数の定義	7
三角関数の諸性質	7
確認： マイナスの角度?	8
三角関数のグラフ	8
三角関数の逆関数	9
応用	10
(1) 倍角の公式	10
(2) 半角の公式	10
(3) 三角関数の合成	10
【練習問題】	11
2. 2 第3週 (複素数の定義と計算方法、オイラーの公式、極座標表現)	12
複素数の定義	12
複素数の絶対値	12
オイラーの公式	13
極座標形式と直交座標系式	13
【練習問題】	15
2. 3 第4週 (極座標を用いた複素数の四則演算、小テスト、演習)	16
<電気回路の基礎>	17
2. 4 第5週 (電位、電位差、電荷、電流、電力、抵抗の概念. 抵抗の直列接続と並列接続)	17
物理の復習 (運動)	17
位置エネルギー	17
電気に関する物理量	18
電荷 単位： クーロン [c]	18
電位 単位： ボルト [V] = [J / c]	18

電流	単位： アンペア[A] = [c / s]	19
電力	単位： ワット[W] = [J / s] $P = V \cdot I$	19
電圧 = 電位差	単位： ボルト[V]	19
抵抗	単位： オーム [Ω] = [V] / [A] $R = V / I$	19
コンダクタンス	単位： ジーメンズ[S] = [A] / [V] $G = 1 / R = I / V$	19
2. 5 第5週	(キルヒホッフの法則)	19
1) 電流則：	回路の任意の接続点(節点)に入り込む電流と出て行く電流の和は等しい。...	19
2) 電圧則：	回路の任意のループ(閉路)において、一定方向に取った電位の和は零となる。	
		19
抵抗による電圧降下		20
直列接続された抵抗の合成抵抗		20
並列接続された抵抗の合成抵抗		21
<例題>		22
【練習問題】		23
【チャレンジ問題】		23
2. 6 第6,7週	(電圧源と電流源の概念)	24
“等価” という考え方		24
“理想的な” 電源		25
電源に含まれる内部抵抗		25
負荷による電源の出力電圧・電流の変動		25
2. 7 第8週	(整合条件；電源の最大出力電力と負荷抵抗の関係)	26
整合条件の導出		26
2. 8 第10週	(直流電源と抵抗からなる回路の電圧・電流の計算)	28
回路網における閉路の取り方		28
回路網における閉路方程式をたてる時の電流の取り方		28
具体的な問題の解き方		29
(解法例 1)		29
(解法例 2)		31
<数学の基礎>		33
2. 9 第11週	(微分)	33
微分の定義		33
微分の基本的な公式の例		33
微分の例： 位置と速度		33
電気回路における微分： コイルとコンデンサ		35
コイルの電流と電圧の関係		35
2. 10 第12週	(微分の続き、積分)	36
コンデンサの電流と電圧の関係		36
複素平面を用いた電流と電圧の関係		36

積分とは？	37
面積を求めること	37
微小な部分を足し合わせる	38
(積分の例) 円の面積.....	39
微分操作の逆操作	40
逆操作の例： 「かけ算」と「わり算」	40
逆操作の例： 「円の面積」の微分 ⇒ 「円周」	41
<電気回路の基礎 2>	42
2. 11 第 13 週 インピーダンス	42
インピーダンスとは.....	42
「コイル」「コンデンサ」のはたらき： 積分作用.....	42
交流インピーダンスとは.....	43
微分と積分の複素表現	44
2.12 直列等価回路と並列等価回路	45
等価回路とは.....	45
直列と並列	45
直列回路と並列回路の変換	46
直列から並列への変換	46
並列から直列への変換	47
【例題】	47
(例題 1) 抵抗の素子の値が全て等しい場合	47
(例題 2) 抵抗の素子の値が等しくない場合	47
(例題 3) 抵抗の素子の値が等しくない場合：その 2	48
【コラム： 分数の書き方】	48
(例題 4) R と L の回路	49
(例題 5) R と C の回路	49

1. 授業の内容

(主な内容： 二つの柱)

この科目は、電気・電子（ハードウェア）系の基礎となる内容を学びます。主な内容と目指す目標は、次の二つです。(詳しくは、シラバスに記載されてあります。)

★電気回路の基礎（方程式を立て、基本的な計算が出来る。）

★電気数学の基礎（三角関数と複素数、極座標の計算ができる。）

(全ての基礎)

この科目では、既に一年生で習った数学の範囲を一部復習します。電気・電子の基礎ではありませんが、数学は全ての専門科目の基礎となります。例えば、情報系の科目の『画像処理』において高速フーリエ変換や離散コサイン変換といった方法が用いられています。これらは、画像処理ソフトでの使用や、JPEG 画像への圧縮での使用など、身近な所で活躍しています。電気・電子系あるいは情報系を問わず、全ての分野の基礎と言えます。「私は将来、情報系。」などと今思っている、どんな道に進むかわかりません。そもそも、情報系の人ほど数学はとても大切ですし、電気回路のような(全ての科目にあてはまりますが)目に見えない抽象的なものを、論理的に扱う事が必要になります。

(繰り返しが大切： 小テストも成績に加算)

「本を見れば載っている。だから覚えなくても良い。」という答えをする人が時々います。私思うに、この答えは当てはまる時とそうでないときがあると思います。少なくとも、学校で学んでいる間は、覚える事は最低必要だと思います。但し、全てを覚えるのではなくて、基本式を理解して細かな計算などは、必要な時に証明しながら用いられれば良いのではないかと思います。しかし、このどこが大事でどこが大事でないかを見極める事、これが一番難しいですね。授業ではなすことは、この一点に尽きます。『ここが大事。ここがポイント。』と言ったら、是非是非覚えておいてください。自分のノートに、黒板になくても“花マル”を付けておくべきでしょう。(できるだけ板書にも印を付けるようにしますが。)

予習も大事ですが、まずは復習を必ずして下さい。授業を聞いたその日のうちに、ノートをたとえ 20 分でもいいので見直せば、記憶を失う(忘れる)速さは極端に遅くなります。皆さん、よく学びよく遊びたいですね。効率のいい勉強の仕方をしましょう。テスト前の一週間の徹夜より、毎日 20 分の復習の方がはるかに効果があります。

小学生の時に、計算ドリルってありましたよね。あれは、まさに繰り返し繰り返し頭に記憶を刷り込むことによる学習効果です。本当は、一週間に同じ科目が 2 回あるとベストでしょうけど、時間割の都合でそれができません。宿題を多分毎回出します。(??) 自分で必ず解いてください。わからないところは、友達に聞いたり、私のところへ質問に来て下さい。とにかく、自分で『わかる』、これが大事です。

2, 3 週ごとに小テストを行う予定です。(??) このテストの成績も、学年末の成績に繰り入れますから、よく復習して下さい。毎回の小テストがあまり悪いと、個別に呼び出して補習を行います。(どこがわからなくなっているのかを、聞いて補講を行います。)

(わかってから解くか、解いてからわかるか?)

高専のカリキュラムの場合、数学で微分積分やベクトルなどを習う前に、一部の専門科目で使い始める事があると思います。しかしながら、これは大学のカリキュラムでもある話です。19歳の年齢でそれに出会うか、16歳で出会うかの違いです。中学を卒業して直ぐにこの体験をすると、“まじめな”人ほど、全てがわからないから私は、、、、、、、、と思いつめる人がいるようです。「詳しくは、あとの〇〇〇〇の科目で習います。」よく耳にする言葉ですね。そうなのです。詳しくは他の科目で習うので、ここではこの結果を用いましょうと先生(私も)言うのです。学生の頃って、これはだまされている気がしますよね。私もそうは思いましたが、私は根が“いい”加減の人間なので、そうかあとで習うのか今はこれを使おうとして、目の前の問題を解いていました。(中には、そう思いきれない科目もあり、そう言う科目はしっかり苦手科目になりました。)そんな言葉で納得できない人は、どんどん質問に来て下さい。上の学年で習う事、あるいは高専では説明しきれない大学院の内容など、私が知る限りで教えます。本当は、こういうことをどんどん教えたいのですが、この学年で教えなければ次の学年の内容がわからなくなるといった“教えるべき内容”があるので、深く踏み込んだ授業ばかりができません。

私は、わかってから解くべき内容と、まずは基本式は成立する事を受け入れて(信じて)それらを用いて問題を解き、あと(上の学年に進んでから)わかる内容の二つがあると思います。どちらか一方だけの勉強をしていると、専門科目は理解できない気がします。そもそも、本当に皆さん全てわかっていますか?例えば、 $1+1$ は何故2なのでしょう?お饅頭を2個用意して、、、これって本当にわかったことになりますか?幅の無い線が交わるって何???などなど。本当は、みんなわかっていないのです。どこかで、公理という名前の経験則を受け入れ(信じて)います。こんな事を書くと、みんなを道迷いにしてしまうので、これ以上は書きません。

言えることは、わかろうとする事はとても大切です。そして、ここはあとで習いますのでこの式を今使いましょうといわれた所は、まずは問題を解く力を繰り返し計算する事で身につけておいてください。この電気電子基礎のかなりの部分は、こうした内容かもしれません。できるだけ詳しく説明して、皆さんが分かるようになるよう努力はします。

(前期末試験終了後の成績不振者に対する補習)

全期末試験終了後の成績(中間と期末試験、レポート、小テストの結果を考慮)が35点以下の学生は、夏休みもしくは9月の第1週の5日間補習を行います。(絶対参加)後期85点以上の点数を取らなければ、最終的に合格点60点にならなくなりますよね。前期中間テストを終えて、もし大きく欠点であった人は、自分から私のところへ質問に来たり、友達に聞いたりして下さい。

2. 授業

<電気数学の基礎>

まず第1回目の授業の最初に、去年までに勉強した内容を、どのくらい理解しているかの実力確認テスト（三角関数、複素数）を行います。2,3週間後にもう一度テストをしますので、忘れてしまっていた範囲を、よく復習しておいて下さい。（テストの解答例は、授業で実施後にホームページに載せておきますので、各自で見てください。）

2. 1 第1, 2週 三角関数の諸性質. (展開公式、三角関数の合成)³

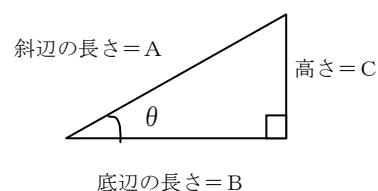
電気回路の分野では、計算において三角関数を必ず使うといっても過言ではありません。電気信号を波として扱いますので、波の振動を数学的に表すのに三角関数は無くてはならないからです。ここでは、既に数学の基礎で学んだ三角関数について復習します。

三角関数の定義

直角三角形を考え、斜辺に対する高さの比率を正弦：サイン(sine)、斜辺に対する底辺の比率を余弦：コサイン(cosine)、底辺に対する高さの比率を正接：タンジェント(tangent)と呼びます。

右の図のように各辺の長さをおくと、次のようになります。

$$\sin(\theta) = C/A, \quad \cos(\theta) = B/A, \\ \tan(\theta) = C/B$$



覚え方のコツ



三角関数の諸性質

基本

- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

(証明) ピタゴラスの定理より、直角三角形では次の式が成り立つ。

³ 授業テキスト：p 33～35 を参照

$$B^2 + C^2 = A^2$$

両辺を A^2 で割ると、

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A}\right)^2 = 1$$

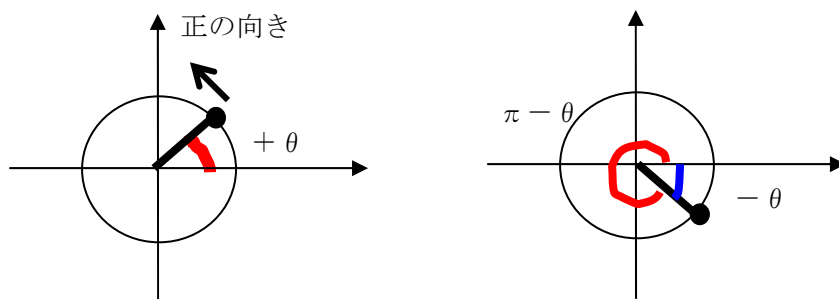
$$\therefore \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

- $\boxed{\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$

確認： マイナスの角度？

⇒ 角度の向き：右回りを正に、左回りを負として約束。

サイン・コサインは、回転する点を y 軸・x 軸へ投影⁴したもの)



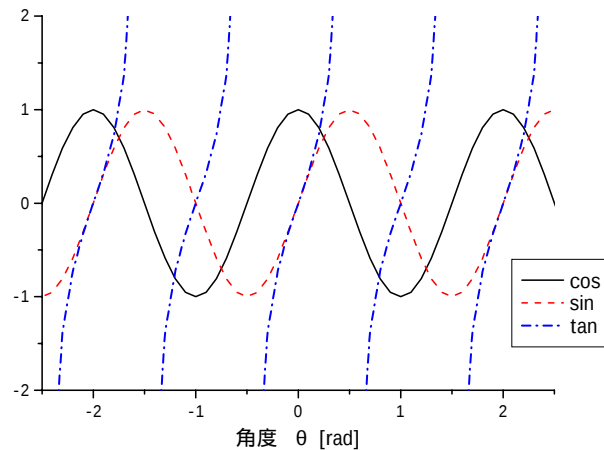
三角関数のグラフ

上の図から分かるように、 $\sin$ や $\cos$ は、単位円をある角度から何周かしても同じ値をとります。このような性質を、周期的と呼びます。 $\sin$ や $\cos$ の周期は、 2π となります。この二つの比である $\tan$ は、 $\cos$ がゼロとなる $(2n+1)\pi$ で無限に大きな値となり、周期が π となります。これらを、式に表すと次のようになります。

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\theta \pm 2n\pi) &= \cos(\theta) \\ \sin(\theta \pm 2n\pi) &= \sin(\theta) \\ \tan(\theta \pm n\pi) &= \tan(\theta) \end{aligned}}$$

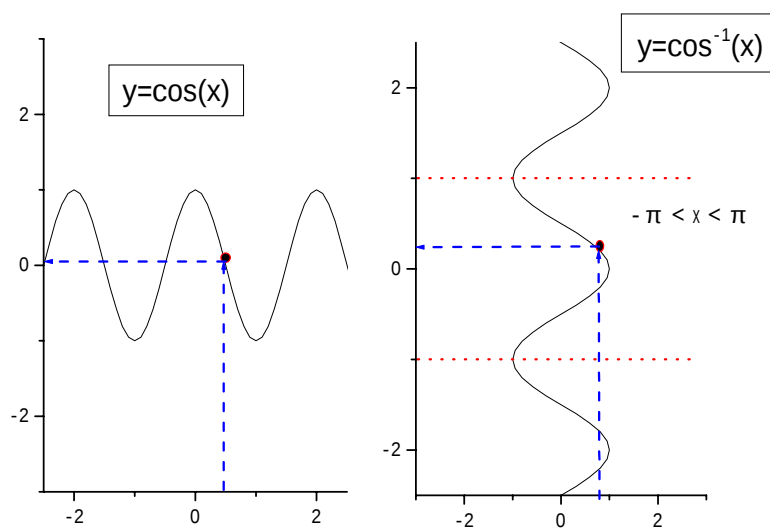
グラフに表すと次のようになります。 $\tan$ は、周期 π であることが分かります。

⁴ 投影 (project)：影をスクリーンに投げかける事。例えば、電気ランプがあり、透明なシートの上にペンで書いた文字を白いスクリーンに生じるものを、プロジェクタなどと呼びます。ここでいう軸への投影というのは、大きさが変化せず、その軸方向成分を取り出すことに対応します。



三角関数の逆関数

変数 x を与えるとある手続き（関数: function）で y が求められる時、 y は x の関数と呼びます。これを記号で表すと、 $y = f(x)$ となります。このとき、結果 y を与えるような、入力される変数 x を求める事を、逆関数と呼びます。記号では、 $x = f^{-1}(y)$ で表します。ここで、記号 f の右上に -1 という文字があります。これを、通常「インバース」（inverse。反対の意味）と呼びます。⁵



⁵数学でしばしば用いられる、逆数の事ではないので気をつけてください。 f と f^{-1} の両方を行うと、結局何もしないことになります。この何もしないというのが、掛け算の逆数をかけたら本と同じになることに似ている為にこの記号を用いるのだと思います。

重要 三角関数の加法定理 $\Rightarrow$ この二つさえ知っていれば、以下の全ての式は導く事ができる。⁶

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

応用

(1) 倍角の公式

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

ここで $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ を用いると、

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - [1 - \cos^2(\alpha)] = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

同様に、

$$\cos(2\alpha) = [1 - \sin^2(\alpha)] - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

(2) 半角の公式

上の式を変形すれば、

$$2\cos^2(\alpha) - 1 = \cos(2\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2}$$

同様に、

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

(3) 三角関数の合成

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ を逆に変形する。

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

ここで、 $\cos(\beta)$ を P , $\sin(\beta)$ を Q とおくと、

$$P\sin(\alpha) + Q\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{但し、} P^2 + Q^2 = 1$$

一般的な場合、 $A\sin(\alpha) + B\cos(\alpha)$ について考える。(ここで、 A と B の 2 乗の和が常に 1 となるとは限らない。)

⁶ 加法定理： この二つの式さえ知っていれば良いと思います。後は、証明（導出の仕方）さえ知っていれば、全ての公式は思い出せます。くれぐれも、三角関数の公式を全て丸暗記しようとししないで下さい。時間が経つと、人間誰でも忘れる傾向があります。公式が混ざり合って間違った使い方をするよりも、確実にこの二つだけをしっかり覚えているようにして下さい。

$$A\sin(\alpha) + B\cos(\alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\alpha) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\alpha) \right]$$

$$\text{但し、} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1, \quad \left| \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| < 1, \quad \left| \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| < 1$$

と変形する。こうする事で、 $\sin(\alpha)$ と $\cos(\alpha)$ の係数の 2 乗の和は 1 となる。

$A\sin(\alpha) + B\cos(\alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha + \theta)$ 但し θ は、次の関係式を満たす。 $\cos(\theta) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$、 $\sin(\theta) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
--

【練習問題】

次の値を計算しなさい。

$$(1) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \quad (2) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \quad (3) \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \quad (4) \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) =$$

$$(5) \sin^{-1}(1) = \quad (6) \cos^{-1}(0) = \quad (7) \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \quad (8) \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

次の式を展開しなさい。

$$(1) \sin(\alpha - \pi) = \quad (2) \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \quad (3) \sin(3\alpha) = \quad (4) \cos(3\alpha) =$$

次の式を合成しなさい。

$$(5) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) = \quad (6) \sin(\alpha) + \sqrt{3}\cos(\alpha) = \quad (6) 2\sin(\alpha) + \sqrt{5}\cos(\alpha) =$$

2. 2 第3週 (複素数の定義と計算方法、オイラーの公式、極座標表現)⁷

複素数の定義

『-1の1/2乗(ルート)』の事を、虚数(imaginary number)と定義します。⁸数学の分野では、一般的に*i*で表されます。しかし、電気の分野では多くのテキストが、*j*で表します。⁹

$$j = \sqrt{-1}$$

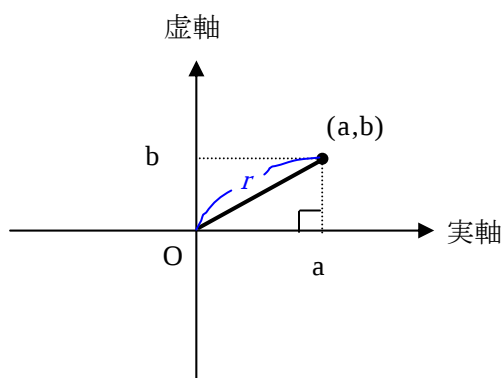
$$j^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

通常、用いる実数(real number)と虚数とを足し合わせたものを、複素数(complex number)と呼びます。複素数の実数部分を実部(real part)、虚数部分を虚部(imaginary part)と呼びます。

複素数の絶対値

今まで考えてきたX-Y平面は、どちらも実数の軸です。今、縦軸Yが虚数である平面を考えます。このような平面を、複素平面と呼びます。複素数の絶対値は、複素平面上の点の原点からの距離に相当します。つまり、直角三角形の斜辺の長さに相当します。実数の世界の絶対値は、原点からの距離に相当する事に似ています。実数の絶対値を求めると、必ず正の数となります。正とか負の符号は、原点からどちらの方向を向いているかを表しています。複素数の場合の実数と複素数のそれぞれの符号は、複素平面内で原点から実数軸のどちらの方向へ、虚数軸のどちらの方向へ向いていると考えればよい事になります。



【例題1】次の複素数の絶対値を求めなさい。

⁷ 授業テキスト：p 51～54、p 61～62 を参照。但し、微分、マクローリン展開に関する説明は、ここでは省きます。

⁸ 中学まで出習う数学では、整数や少数や分数や有理数などの実数しか用いなかったと思います。日常生活で実際に出くわす数(実数)とは異なり、仮想的な(実際には存在しない、虚な)数を数学では考えます。理論の中で矛盾がなく使え、正しい事が証明できれば、“真実”となります。電気の分野では、三角関数と虚数はとても大切ですので、まずは使えるようになっておいてください。厳密な数学を用いた記述は、後で出て来ます。

⁹ 電気の分野では、交流の電流を*i*で表す事が多い。そのため、虚数と電流を区別する為(?) *j* という文字を使うと思われまふ。ちなみに、電流密度を *J* (大文字) で表す事がまれにあります。

$$|1-j2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

※注意 虚部の2乗を計算する時には、jを絶対にルートの中へ入れない。絶対値の計算結果は、必ず正の実数になる。(負の数には、絶対にならない。ただし、ゼロの絶対値は、ゼロ。)

【例題2】 次の計算をなさい。

$$(1) \quad (1+j2)(2-j3) = 1(2-j3) + j2(2-j3) = 2-j3+j4+6 = 8+j$$

$$(2) \quad (2+j)^2 = 2^2 + j4 - j^2 = 4+j4+1 = 5+j4$$

【例題3】 次の複素数を分母を有理化し、実部と虚部に分けなさい。

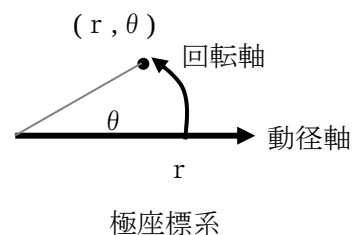
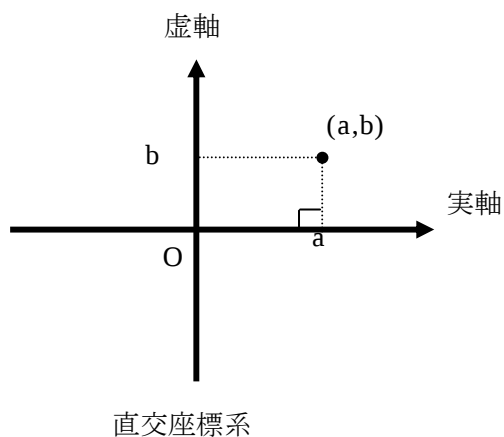
$$\frac{1+j2}{2-j3} = \frac{(1+j2)(2+j3)}{(2-j3)(2+j3)} = \frac{2+j3+j4-6}{4+9} = \frac{-4+j7}{13} = -\frac{4}{13} + j\frac{7}{13}$$

オイラーの公式

最重要

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

極座標形式と直交座標系式



平面上の任意¹⁰の点は、二つの座標成分が与えられるとその位置がただ一つ（一意的に）決まります。二つの軸が互いに直角に交わる直交座標系では、縦軸と横軸の座標が与えられと点の位置が決定されます。一つを原点からの距離（‘うでの長さ’）とし、もうひとつの軸をある方向からの角度（偏角）とするとやはりその座標が決まります。例えば、もし皆さんが船に乗っているとすると、

¹⁰ 任意（にんい）：「無作為に（適当に、でたらめに）選んだ」という意味。英語では、any（どんな・・・でも）に相当します。

今日算までの距離と方位が与えられれば、その物体を避ける準備が始められます。このとき、自分の現在の場所が原点で、進行方向を基準とします。もし、ここで直交座標系を用いると、いちいちその座標から距離と方向を計算しなおさなければならなくなります。

自分が解こうとしている問題に対して、どのような座標系を用いるかは、どちらが簡単に問題が解けるかによって選択するのが好ましいと思います。どちらの座標系も、同じ点を表しているのですから、答えは同じになります。

ある一つの点が、直交座標系で(a, b)、極座標系で(r, θ)で表される場合、次の関係式が成り立ちます。

最重要

$$a + jb = re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$\text{但し、} r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

【例題】

$$(1) \quad 1 - j = \sqrt{1^2 + 1^2} e^{j\theta} = \sqrt{2} e^{j\theta}, \quad \text{但し } \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore 1 - j = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$(2) \quad \left| \frac{3 + j4}{2 + j} \right| = \frac{|3 + j4|}{|2 + j|} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

【別の解法】 上のような方法でなく、分母の共役な複素数を分母分子にかけ実部と虚部に変形してから絶対値を求める方法を如何に示します。答えは、同じになります。

$$\left| \frac{3 + j4}{2 + j} \right| = \left| \frac{(3 + j4)(2 - j)}{(2 + j)(2 - j)} \right| = \left| \frac{6 + 4 + j8 - j3}{4 + 1 + j2 - j2} \right| = \left| \frac{10 + j5}{5} \right| = |2 + j| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

同じ答えが求められるならば、できるだけ間違いの少ない方法を選ぶのが好ましいと思います。

証明 $a + jb = re^{j\theta}$ が成立するならば、

$$\left| \frac{a + jb}{c + jd} \right| = \frac{|a + jb|}{|c + jd|} = \frac{|r_1 e^{j\theta_1}|}{|r_2 e^{j\theta_2}|} = \frac{|r_1|}{|r_2|} \left| \frac{e^{j\theta_1}}{e^{j\theta_2}} \right| = \frac{|r_1|}{|r_2|} \left| \frac{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2}} \right| = \frac{|r_1|}{|r_2|}$$

複素数の分数の絶対値は、分母と分子の絶対値をあらかじめ計算しておき、それらを割り算すればよい事がわかります。

オイラーの公式より、 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$ が成り立ちます。従って、次の関係が成り立ちます。

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

【練習問題】

次の複素数を、極座標表現（腕の長さと角度）を用いて表しなさい。

$$(1) 2+j2= \quad (2) -1-j= \quad (3) 2+j= \quad (4) -j3= \quad (5) -3+j\sqrt{3}=$$

次の複素数の絶対値を計算しなさい。

$$(1) |2 + j\sqrt{5}| = \quad (2) |3 - j3| = \quad (3) |-4 + j2| = \quad (4) \left| \frac{3+j}{1-j3} \right| = \quad (5) \left| \frac{\sqrt{2} + j\sqrt{3}}{3 + j4} \right| =$$

2. 3 第4週 （極座標を用いた複素数の四則演算、小テスト、演習）¹¹

前回の小テストの復習と、今まで学習した範囲の復習を目的とした小テスト（30分程度）を実施予定。

¹¹ 授業テキスト：p 59～p 62 参照。

<電気回路の基礎>

2. 4 第5週 (電位、電位差、電荷、電流、電力、抵抗の概念、抵抗の直列接続と並列接続)

物理現象を扱う時には、扱うものの概念(考え方)と量(単位¹²)がとても大切です。まず、1年生で習った物理の内容を復習しましょう。(ここが分かっていると、後の内容が理解できません。)

物理の復習(運動)

力(force: F) 単位: ニュートン[N]

速度(velocity: v) 単位: メートル毎秒[m/s]

加速度(acceleration: a) 単位: メートル毎秒の2乗[m/s²]

重力加速度(gravity: g) 値(定数): 9.8[m/s²]

$$[力(F)] = [質量(mass: m)] \cdot [加速度(a)] \quad F = m \cdot a$$

$$\text{単位 } [N] = [kg] \cdot [m/s^2]$$

$$[エネルギー(energy)] = [仕事(work)] = [力] \cdot [力の方向に移動した距離] \quad w = F \cdot d$$

$$\text{単位: } \text{ジュール}[J] = [N] \cdot [m]$$

$$[仕事率] = [単位時間あたりの仕事]$$

$$\text{単位 } \text{ワット}[W] = [N] / [s]$$

位置エネルギー

ある場(field)にあることによるエネルギー。潜在的なエネルギー、ポテンシャル エネルギー(potential energy)。

例えば、重力(重力場)を考えます。この様子を図1に示します。基準となる高さ(例えば、床)からある高さ(height) hに物体を持ち上げたとします。(図1 b) 重力による力は、 $f = m g$ となります。仕事、即ちエネルギーは、力×その方向へ動いた距離ですから、 $f \cdot h = m g h$ となります。外部からの仕事により、物体は $m g h$ のエネルギーを得た事になります。この得たエネルギーは、手

¹² 標準単位系(SI単位系) MKS単位系

物理量を表す時には、メートル(m)とキログラム(kg)と秒(s)を用いる。これらを用いて表す単位のシステム(系)を、MKS単位系と呼ぶ。もし、cmやgなどの単位が計算式に含まれていれば、一旦それらをMKSに変換してから計算しないといけません。[N]や[W]は、MKSを用いて表す事ができる単位です。

単位の多くは、人名が用いられている。例えば、仕事率の単位は、ワット(W)で表す。ワットは、蒸気機関の発明で有名な科学者である(James Watt; 1736 - 1819)。英語では、人名(固有名詞)は一般的に大文字で書く。そこで仕事率の単位のワットは、大文字で[W]と書く。同じダブリュー(w)を用いる表記でも、仕事(work)を表す時には、私の文章の中では小文字で表す事とします。テキストによっては、どちらも大文字であったりするので、読み手が注意をしなければなりません。例えば他の例として、vという文字は、あるときは速度(velocity)として扱われ、別の個所では電圧(voltage)として扱われます。

で物体を持ちつづけている間、あるいは何か固定する板などの上に置かれている間は、いつまでもエネルギーをもった（蓄えた）ままの状態です。そういう意味で、潜在的なのです。もし物体を持っている手を離せば(図 1 c)、あるいは固定していた台を外せば、物体は重力により落下します。速度 v であれば、 $m v^2 / 2$ の運動エネルギーとそのときの高さ h' の位置エネルギー $m g h'$ という形にエネルギーの状態が変化します。(図 1 d) $m g h = m v^2 / 2 + m g h'$ という式で表され、エネルギーは保存されます。この例は、重力についてですが、実はこの考え方は、重力以外の世界（例えば電気の世界）でも、よく似た考え方ができるのです。ポイントは、外部から加えた力とその方向への移動距離の積がエネルギーとなることと、運動しようとする方向は位置エネルギーが減少しようとする方向へ移動する事です。これさえわかっているれば、どのような場でも、重力のように日常生活で体験できないものも分かると思います。

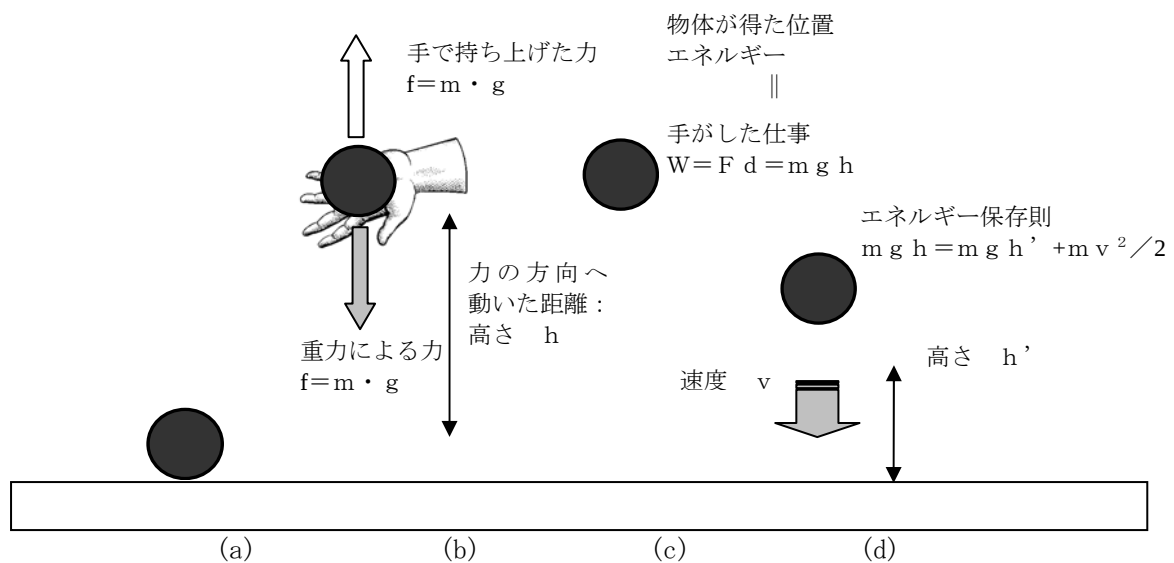


図 1 位置エネルギーの説明

電気に関する物理量

電荷¹³

単位：クーロン[c]¹⁴

電気の量を表すものを、電荷（でんか）と呼びます。文字どおりに読めば、「電気を荷うもの。」となります。荷（にな）うとは、「運ぶ」とか「自分の責任として引き受ける。負担する。負う。」という意味があります。

電位

単位：ボルト[V] = [J / c]

電氣的な位置エネルギー。1クーロンあたりのエネルギー。

¹³ 電荷： 英語では、"electric charge"です。chargeという言葉の動詞としての意味は、「(代金を)請求する。」「支払い・損害などを (...の) 負担にする。」などがあり、これから「罪・責めなどを (人・事などに) 負わせる, (...の) せいだとする。」という意味があります。

¹⁴ クーロン (coulomb : c) フランスの物理学者C.A. de Coulomb (1736 - 1806) の名前を単位としたもの。電気の量(電荷)を表す単位。単位のほとんどは大文字で表しますが、クーロンは通常小文字(c)で表します。同じ“シー”を用いる量に、コンデンサなどを表す大文字の C があります。こちらは、電気回路や電子回路で頻繁に用

電流 単位： アンペア[A] = [c / s]

1 秒間に流れる電荷量。

電力 単位： ワット[W] = [J / s] $P = V \cdot I$

電気エネルギーによる仕事率。単位時間（1 秒）あたりの仕事量。通常、記号では P (power) を用いる。

電圧 = 電位差 単位： ボルト[V]

異なる 2 点間の電位の差。基準となる電位が存在する。

抵抗¹⁵ 単位： オーム [Ω] = [V] / [A] $R = V / I$

物体の両端に電位差（電圧）を生じさせ電流を流そうとする時に、流れるのを防ごうとする働きを、電氣的な“抵抗”（通常、単に抵抗）と呼びます。

コンダクタンス¹⁶ 単位： ジーメンズ[S] = [A] / [V] $G = 1 / R = I / V$

抵抗の逆数。物体の電流の流れやすさを表す量。

重要：

2. 5 **第5週** （キルヒホッフの法則）

1) 電流則：回路の任意の接続点（節点）に入り込む電流と出て行く電流の和は等しい。

考えている点について、入り込む電流をプラスにするかマイナスにするかはどちらでもかまいません。

2) 電圧則：回路の任意のループ（閉路）において、一定方向に取った電位の和は零となる。

上と同様に、ループをどちら向きに巡回するかはどちらでもかまいません。

電流の向き： もし入り込む（吸い込む）電流をプラスとしたならば、出て行く（吐き出す）電流はマイナスとして考えて全電流をたすと零となります。もし反対に、入り込む電流をマイナスとしたならば、出て行く電流をプラスとすればよく、やはり足し合わせたら零となります。結局、全電流を足し合わせて零となるわけですから、自分の中で電流の向きに対するルールを決めて全体をたし合わせればよいというわけです。

電圧の向き： ループを一つの方向に見て一巡する時、電位の上がるものをプラス、電位の下がるものをマイナスとして足し合わせます。右回り、左回りのどちらでもかまいません。上と同様に、一つのループの中でルールが一定であれば、全体の足し合わせがゼロという条件は満たします。

いられます。

¹⁵ 抵抗(resistance)の単位は、面積や体積といった空間の大きさを含みません。単位体積あたりの抵抗を表す量を、抵抗率といいます。単位は、[Ω m]となります。

¹⁶ コンダクタンス(conductance)の単位は、以前は抵抗の単位Ωを上下ひっくり返して用いていました。読み方もオーム(ohm)の逆数という事で右から読んで、モー(mho)と読んでいました。現在は、ジーメンズと呼び、記号はSを用いています。アルファベットは大文字のSを使用しています。小文字のsは、通常、秒(second)として用いられます。

抵抗による電圧降下¹⁷

電源 E [V] と直列に、抵抗 R [Ω] が直列に接続されている場合について考えます。今、この回路には閉じた回路（閉路：ループ）がひとつしかありません。今、導線や電源には抵抗が含まれないと仮定します。電流 $I = V/R$ [A] が、電源のプラス側から抵抗を通り、電源のマイナス側へ流れます。回路内の4つの点を A, B, C, D とします。図2に示すように、電源は電位を、点 D に比べ点 A で E [V] だけ高くなるような仕事をします。閉路を流れる電流は点 B から点 C の間にある抵抗で、 E [V] だけ電位が下がります。点 C と点 D は同じ電位になりますので、これでつじつまが合います。もし抵抗で E [V] でない電位が下がると、出発点として考えた点 D の電位が矛盾してしまいます。電位（電気的な位置エネルギー）は、ただ一つ（一意的：unique）のはずです。

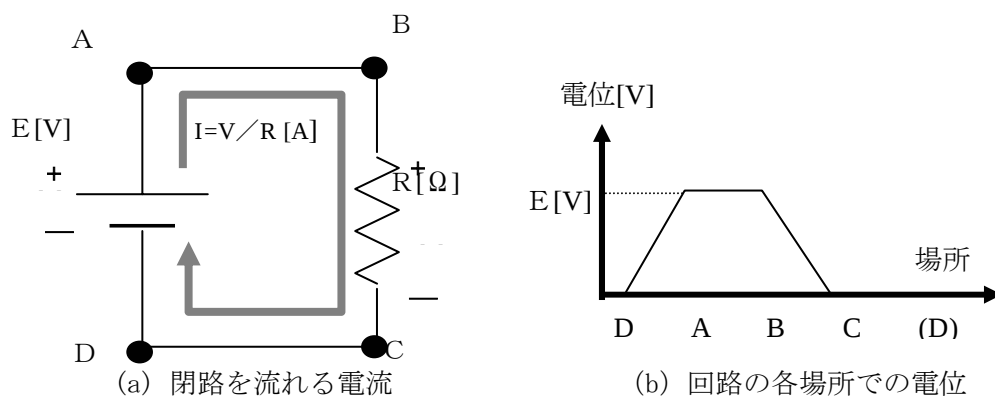


図2 電圧降下の様子

直列接続された抵抗の合成抵抗

図3は、3つの抵抗を直列接続したものを示しています。抵抗 R_1 , R_2 , R_3 に、それぞれ電圧 V_1 , V_2 , V_3 が印加¹⁸され、電流 I_1 , I_2 , I_3 が流れているとします。この三つの抵抗全体にかかる電圧を V , 流れる電流を I とします。図から明らかなように、どの抵抗を流れる電流も等しくなります。また、全体の電圧降下は、それぞれの抵抗の電圧降下の合計になります。したがって、次の式が成り立ちます。

$$\begin{cases} I = I_1 = I_2 = I_3 \\ V = V_1 + V_2 + V_3 \end{cases}$$

オームの法則 ($V = RI$) から、

$$V_1 = R_1 I, \quad V_2 = R_2 I, \quad V_3 = R_3 I$$

¹⁷ 電圧降下(voltage drop)：個人的には、電位が低下する事なので、電位降下と呼びたいのですが、いろいろな書籍を探しても、そのような言葉が見つからなかったので、電圧降下と呼ぶ事にします。

¹⁸ 印加：電圧を加えることを、いんか（印加）と呼びます。電気的位置エネルギーの差（電位差：電圧）を加えるのですから、これは、電気的な位置エネルギーの傾きを作る事と同じになります。このことから、電圧を印加する事を、『バイアスを印加する』とも言います。バイアス(bias)というのは、「傾ける」という意味があります。例えば、布を斜めに切る時に、“バイアス”という言葉を使う事があるようです。

$$\therefore V = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I = R I$$

したがって、全体の合成抵抗Rは、

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

となります。

このことから、直列接続された抵抗の合成抵抗は、それぞれの抵抗の和となります。

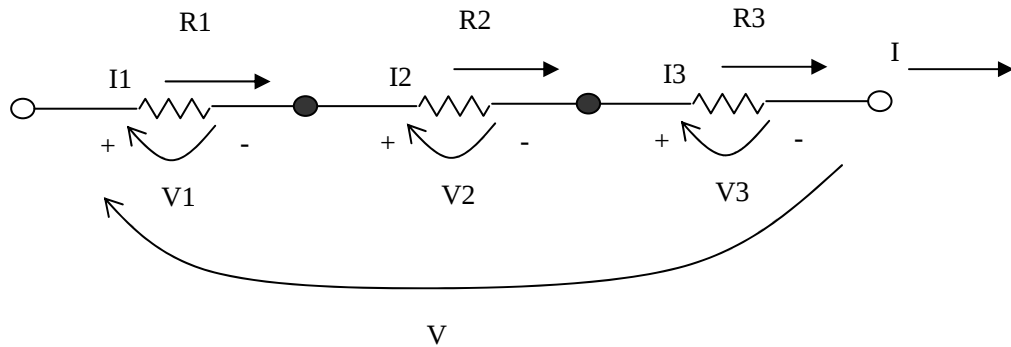


図3 3つの抵抗を直列接続した場合

並列接続された抵抗の合成抵抗

図4に、並列接続された三つの抵抗を示します。並列に接続されている抵抗は、全て同じ電圧が印加されます。並列に接続されているこの回路は、配線の抵抗を無視できるとすれば、図5の回路と電気的には同じです。図5の回路の点Aの場所に流れ込む電流をプラス、出て行く電流をマイナスで表すと、キルヒホッフの法則から次の式が成り立ちます。

$$\begin{cases} V = V_1 = V_2 = V_3 \\ I = I_1 + I_2 + I_3 \end{cases}$$

オームの法則 ($V = R I$) から、

$$I_1 = V / R_1, \quad I_2 = V / R_2, \quad I_3 = V / R_3$$

ここで、抵抗をコンダクタンスに変化すると ($G = 1/R$ とすると)、

$$I_1 = G_1 V, \quad I_2 = G_2 V, \quad I_3 = G_3 V$$

$$\therefore I = G_1 V + G_2 V + G_3 V = (G_1 + G_2 + G_3) V = G I$$

即ち、全体の抵抗をR、全体のコンダクタンスをGとすると、次の関係が成り立ちます。

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

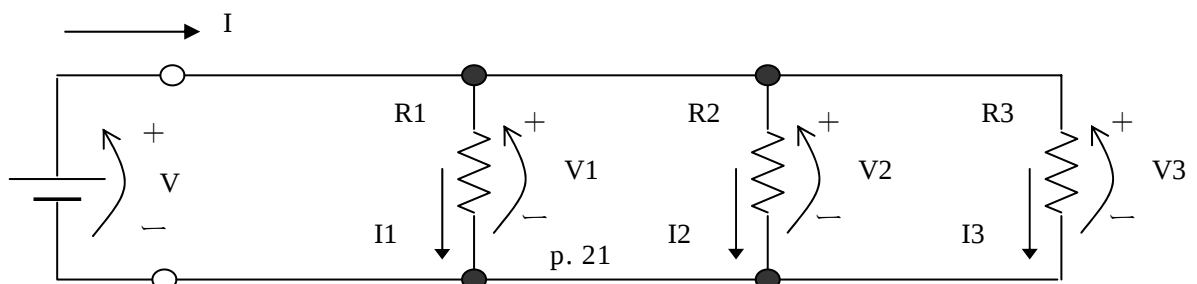


図4 3つの抵抗を並列接続した場合

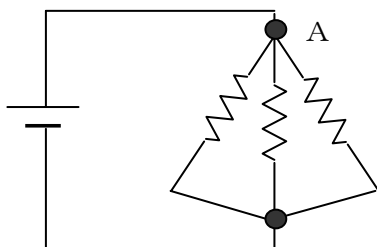


図5 図4の回路と同じ回路（各抵抗の電位の高い側を一箇所に集めたもの）

< 例題 >

図6の回路の合成抵抗を求めなさい。
但し、抵抗の値は、全て $R [\Omega]$ とする。

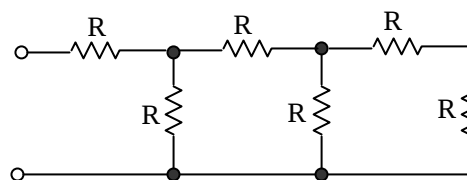
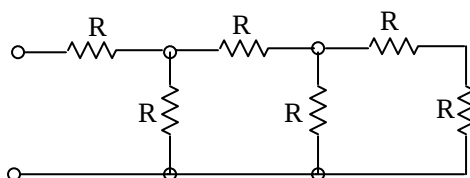


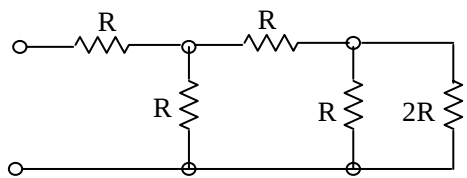
図6

【解答例】

このような回路を、‘はしご型’¹⁹と呼びます。一番右端から順に合成抵抗を計算していきます。



(1) 一番右端の直列抵抗を変換



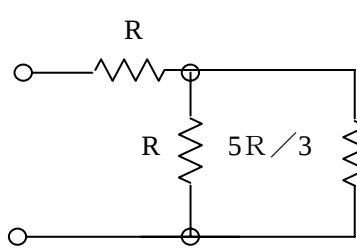
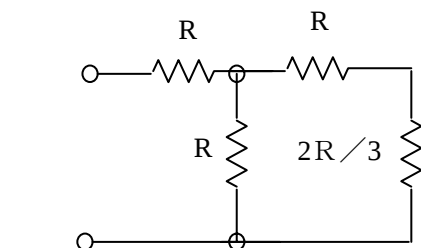
(2) 並列抵抗を変換

(3) 並列抵抗を計算すると、 $R' = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2RR}{2R + R} = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R$ となる。以下同様に繰り返

します。

(3)

(4)

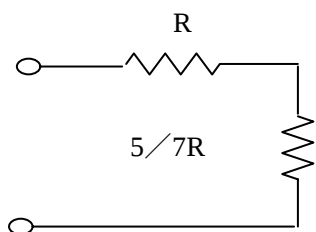


¹⁹ 一つ一つの閉路を“段”と呼ぶことがあります。同じ回路が何個もつながっているものを、多段接続と呼びます。図6の回路は、抵抗 R が‘逆L字型’に二個接続されたものが3段接続されていると見ることができます。

$$(5) R' = \frac{\frac{5}{3}R^2}{R + \frac{5}{3}R} = \frac{\frac{5}{3}R}{\frac{7}{3}} = \frac{5}{7}R$$

(6) したがって、全体の合成抵抗は、

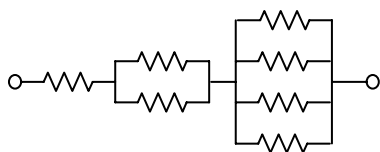
$$R + \frac{5}{7}R = \frac{12}{7}R \quad \text{となります。}$$



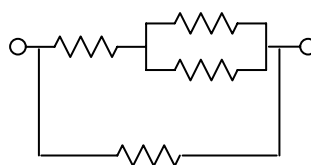
【練習問題】

次の回路の合成抵抗を求めなさい。但し、抵抗の値は、全て $R [\Omega]$ とします。

(1)

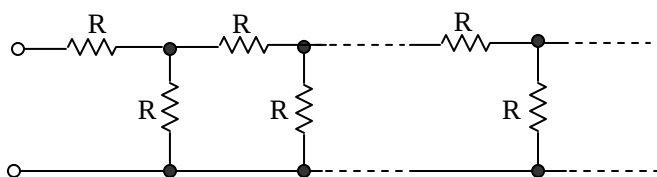


(2)



【チャレンジ問題】²⁰

例題 1 の回路が無限に続く時、左端から見た合成抵抗を求めなさい。



²⁰ チャレンジ問題： これは、今の段階では解けなくてもかまいません。電気回路を 3 年生あるいは 4 年生で勉強すると“ちゃんと”解けるはずです。（これに似た問題が、就職／偏入学試験などで出題される事もあります。）宿題にはしませんので、解けた人は答えを持って聞きに来て下さい。

2. 6 第6, 7週 (電圧源と電流源の概念)

“等価”という考え方

二つのものが本当は同じものでなくても、その働きが等しく、外部から見たら区別がつかないときに、等価（とうか）であるといいます。分かりにくいものを取り扱う時に、便宜的に等価で分かりやすいものに置き換えて考える事が良くあります。

(例) “空気ばね”

「ばね」というのは、通常、硬い（弾性がある）金属を変形させると元の形状に戻ろうとするものを言います。筋肉トレーニングなどに使うエキスパンダーのような‘つるまきばね’や、自動車の車体とタイヤの間にある‘板ばね’などがあります。つりあいの位置からのずれ（偏差）を Δx 、ばねの強さを表す係数（ばね定数）を k とすると、元に戻ろうとする力 F は、

$$F = -k \Delta x$$

で表されます。この現象は、物質を構成する原子と原子の間に働く引力と反発力によります。

一方、“空気ばね”と呼ばれるものは、閉じ込めた空気などの気体を圧縮しようとするとき押し返し（反発し）、引っ張ろうとすると逆に縮もうとする働きから、あたかも‘ばね’のように働くものを言います。例えば、着地した時の衝撃を吸収するために、スポーツシューズなどのかかとに空気を閉じ込めて利用しているものがあります。この空気ばねは、外から加える大気圧（大気圧）と閉じ込められた気体の圧力が釣り合っている状態からずれると、例えば、外から圧縮すると中の空気はわずかしき体積を減少できず加えられた力に対して反発力を生じます。これが、あたかもばねと同じように働いているように思えるのです。閉じ込められた気体は、つるまきばねと等価とみなす事ができます。

しかし、等価という考え方は、ある限られた働き（現象）だけについて見たら同じであるというに過ぎません。例えば、つるまきばねに許容以上の力を加えると金属のばねが伸びてしまいその働きをしなくなります。（塑性²¹変形）。一方、空気ばねに許容以上の力を加えたらどうなるでしょう。可能性としては、まず容器の強度不足であれば、パンクします。容器が十分強度があれば、多分、期待にどんどん圧力をかけていくと発熱し²²、限界を超えると発火すると思います。反対に圧力をどんどん減らしていけば、温度がどんどん下がって²³、液体・固体になると思います。（ここで思いますというのは、実際には簡単に実験できないからです。ほとんどの場合、容器が先に破壊されてしまいます。）

²¹ 塑性(plastic)：粘土のように力を加え、その後力を取り除いても元に戻らない変形の事。力を取り除いたら元に戻る変形を、弾性(elastic)変形と呼びます。身の回りには石油化学製品は、形が元に戻らないから、プラスチック製品なのですね。もし、力を加えるたびに变形していたら容器などに使用できませんね。

²² 自転車の空気を入れているときに、空気入れのタンクの所を触てみると、暑くなっているのを感じる事ができます。

²³ これを利用したのが、エアコン・冷蔵庫です。冷媒と呼ばれる気体を圧縮・膨張させる事で、発熱・吸熱させています。

“理想的な”電源

負荷²⁴が変化しても、一定の電圧を出力する。 ⇒ 定電圧源
負荷が変化しても、一定の電流を出力する。 ⇒ 定電流源

電源に含まれる内部抵抗

“理想的な”という言葉は、“実際には存在しないもの”という意味を暗に含んでいます。電気回路で重要な電源についても、この理想的なという言葉がつきます。上で述べた定電圧源や定電流源は、理想的な電源であり、実際に私たちが使う事ができる入手可能な電源は、**電源に接続する負荷によって、電圧や電流が変化してしまいます**。²⁵ この原因は、**電源の内部に必ず抵抗が存在するからです**。特殊な材料をのぞけば、通常の物質は必ず抵抗が存在します。²⁶

電源出力のプラス端子とマイナス端子に何もつながらない時（開放時）の電源出力端子間の電圧を V_o とします。一方、プラス端子とマイナス端子を抵抗ゼロの導線でつないだ時（短絡時）の電流を I_s とします。²⁷理想的な電源というのは、出力端子に接続する負荷が変化しても常に一定の電圧を出力し、無限に大きな電流までも流す能力がある電源です。（実際には、このような電源は存在しません。）実際の電源には、必ず電源内部に等価的な抵抗素子が存在します。この内部抵抗を ρ として表すと、次の関係式が成り立ちます。

$$V_o = \rho I_s \quad (\text{変形すると、} I_s = V_o / \rho)$$

電源が流す事ができる最大の電流量（電流容量）が大きいほど、より理想的な電源といえます。このことは、つまり、電源の内部抵抗がより小さい電源が理想的だとも言い換えることができます。

負荷による電源の出力電圧・電流の変動

負荷抵抗の値を R_L とします。実際の電源は、等価的に出力 E [V]の定電圧源と内部抵抗 ρ [Ω]が直列に接続されたものとみなす事ができます。定電圧源から見れば、等価的に負荷と内部抵抗とで電圧が分圧されます。負荷に実際に印加される電圧を V_L 、負荷に流れる電流 I とすると、

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + \rho} E, \quad I = \frac{E}{R_L + \rho}$$

となります。負荷で消費する電力を P_L とすると、

²⁴ 負荷(load)：電源に接続するヒータのような抵抗や、スピーカのようなコイルなどの事。電源が出力できる電流を越えるような使用をしたときを、過負荷(over load)といいます。

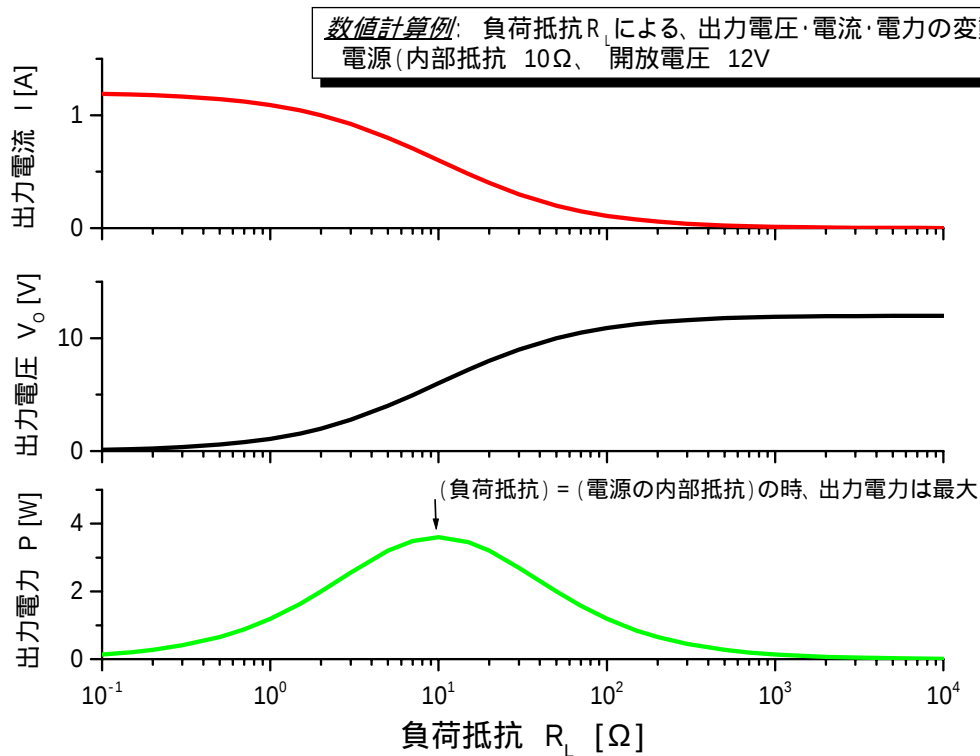
²⁵ 実際の電源回路は、電子回路を用いて、異なる負荷による出力変動を少なくするような工夫がなされています。

²⁶ 超伝導材料：現在開発されているものは、室温よりもかなり冷やさないと（例えばマイナス 200℃程度）電気抵抗がゼロになりません。

²⁷ 負荷を接続しない状態を、開放(open)と呼びます。一方、抵抗ゼロの導線で接続した場合を、短絡(short)と呼びます。「回路がショートした。」というのは、本来負荷としてある値の抵抗を持ったものが接続されるべき回路の場所が、導線で短絡してしまった場合を言います。

$$P_L = V_L I = \frac{R_L}{(R_L + \rho)^2} E$$

負荷を何も接続しない時の電源の出力電圧(開放電圧)を 12V、内部抵抗を 10Ωと仮定したときの、出力される電流・電圧・電力の変化を、次のグラフで表します。



この図から明らかなように、負荷抵抗が増加するに従い電流は減少しますが、電圧は増加します。ある負荷抵抗を接続した時に、最も大きな電力を出力できる事が分かります。電源の内部抵抗と負荷抵抗の値が等しい時、出力が最大となります。これを、整合条件と呼びます。同じ電源でも、負荷により出力電力は、変化するのです。

2. 7 第8週 (整合条件；電源の最大出力電力と負荷抵抗の関係)

整合条件の導出

$$P_L = V_L I = \frac{R_L}{(R_L + \rho)^2} E = \frac{1}{R_L + 2\rho + \frac{\rho^2}{R_L}} E$$

負荷抵抗のみが変化する時は、変数は R_L であり ρ は固定(定数)である。上の関数は、微分を用いて最大になる条件を求める事ができるが、ここでは、相加平均と相乗平均の関係を用いて証明する。 x 、

y がともに正である時、 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ の関係が成り立つ。ここで、統合が成立するのは、 $x = y$ の時のみである。この関係式は、次のように証明できる。

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - (\sqrt{xy})^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - xy = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \geq 0$$

この関係式を用いると、

$$R_L + \frac{\rho^2}{R_L} \geq \sqrt{R_L \frac{\rho^2}{R_L}} = \rho, \quad \text{但し、} R_L = \rho \text{ の時、等号が成り立つ。}$$

したがって、負荷抵抗が内部抵抗と等しい時に分母が最小となるので、最大出力電力 P 箱の時最大値をとることになる。

2. 8 第10週 (直流電源と抵抗からなる回路の電圧・電流の計算)

既に、2.5 節で述べたように、電気回路の計算は、基本的に全てキルヒホッフの法則（電圧に関する閉路方程式と、電流に関する接点方程式）で表せます。ここでは、直流電源回路と抵抗から構成される電気回路中の各部分の電圧と電流を求める具体的な方法を示します。

回路網における閉路の取り方

電気回路に電源や抵抗などが接続されたものを電気回路と呼びます。²⁸電気回路の中で、閉じたループを作っている時、それを閉路（へいろ）と呼びます。閉路が複数存在する時、回路網（ネットワーク）と呼びます。閉路の取り方には、いろいろあります。閉路の中に別の閉路が入っていても構いません。但し、必ずスタートの位置と終わりの位置が同じでないといけません。つまり、‘閉じた’ループを形成しているから、閉路となるのです。閉路を取る時の向きは、時計回りでも反時計回りでも、どちらでも構いません。計算結果は、同じになります。閉路方程式を立てるときに、その中でちゃんと向きが統一されていればいいのです。

例えば、次の図1のような電気回路網があるとすると、閉路のパターンとしては3通り考えられます。（右の図中の灰色の太い矢印。）どの閉路についても、キルヒホッフの電圧則は成り立たなければなりません。²⁹

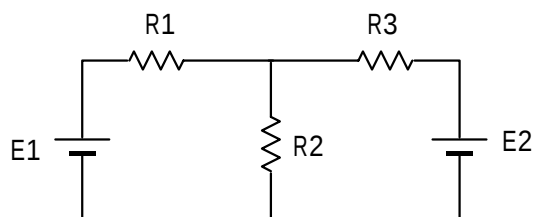


図1 回路網の例

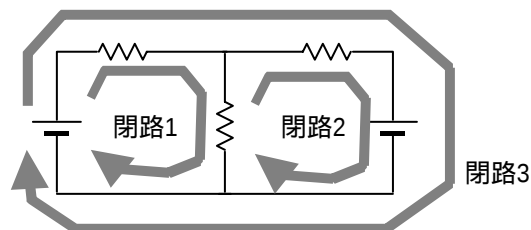


図2 閉路の取り方の例
(実際には、二つの閉路で計算はできる)

回路網における閉路方程式をたてる時の電流の取り方

大きくけると二つの方法があります。一つは、上で説明した閉路の矢印の向きに流れる電流をそれぞれ仮定して計算式を立て、キルヒホッフの法則から連立方程式をたて計算する方法。もう一つは、各閉路の節点（交点）での枝に流れる電流を仮定し計算する方法です。例えば、上の図のような回路における電流の設定の仕方は、次の図のようになります。ここで、注意が必要なのは、実際にR2に流れる電流が、左の方法では、 $I_1 - I_2$ だけ上から下向きに流れると言う事です。電流の向きは、どちら向きにとっても構いません。計算結果は同じ値になります。仮に逆向きのとんでも、計算すればマイナスの値として求められ、実際には最初に仮定した向きと反対向きだということに

²⁸ 実際の電気回路には、抵抗の他にコイル (L) やコンデンサ (C)、電流源などが接続されています。

²⁹ 但し、電流を実際に計算する際には、全ての閉路について計算しなくても、必要最低限な数の閉路について計算すればよい事を、あとで学びます。

なります。どちらの電流の取り方をしても、各抵抗を流れる電流は同じ値に最終的になります。

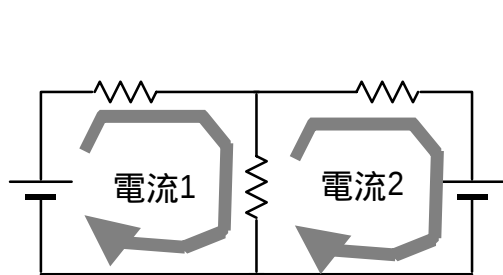


図3 電流の取り方の例1（閉路と同じ）

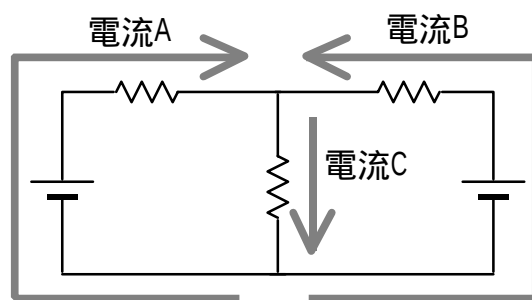


図4 電流の取り方の例2（枝ごとにとる）

具体的な問題の解き方

図1の回路の計算をここで行いましょう。いろいろな計算の仕方がありますが、具体的な例として3つの計算を示します。³⁰計算結果が同じになる事がわかります。同じ計算結果となるならば、できるだけ分かりやすく、簡単な方法をするのが、より計算間違いを減らすのに効果的です。先ず、おそらく一番計算しやすい方法を示し、それ以外のものを順に示します。

（解法例 1）

図2に示した閉路1と閉路2において流れる電流を、図3のように I_1 、 I_2 とおきます。³¹それぞれの閉路における、キルヒホッフの法則による閉路方程式は、次のようになります。

³⁰ 他にも計算の方法としてはありますが、ここでは3つの方法だけを例に挙げます。

³¹ 閉路2の電流は、実際には反時計回り流れるかも知れません。しかし、電流をどちら周りにとっても、マイナスの符号がつくだけで、実は同じ答えとなります。閉路2が反時計回りになる事が有り得るように、閉路1も同様に反時計回りになる事が可能性としては有り得ます。キルヒホッフの法則を用いる時には、電流の向きはあくまでもどちらかに仮定しているだけで、実際には正とか負の電流が求められ、実際の電流の向きが正しくただ一つ求まります。

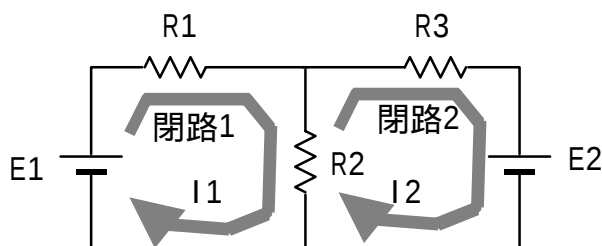


図5 解法例1（閉路と電流を同じとする）

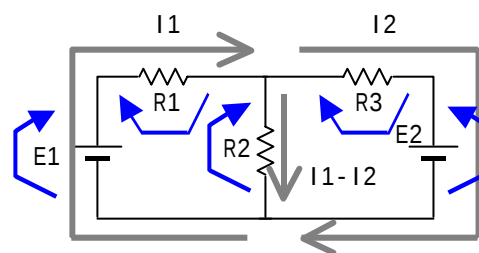


図6 実際に各部分に流れる電流

$$\begin{cases} E_1 - R_1 I_1 - R_2 (I_1 - I_2) = 0 \\ R_2 (I_1 - I_2) - R_3 I_2 - E_2 = 0 \end{cases}$$

ここで、閉路の進む方向に電圧が上がる場合の符号をプラスに、下がる場合の符号をマイナスとしました。電源 E_1 は電圧が上がりますし、抵抗 R_1 では電流が左から右に流れますので、 $R_1 I_1$ の電圧だけ抵抗では電位が下がる（逆起電力）為、符号はマイナスとなります。 R_2 を上から下に流れる電流は、 $I_1 - I_2$ となる事に注意が必要です。上の連立方程式は、未知数が二つで式が二つあるので、値を求める事ができます。上の式を変形すると、次のようになります。³²

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 = E_1 & \text{式1} \\ R_2 I_1 - (R_2 + R_3) I_2 = E_2 & \text{式2} \end{cases}$$

（式1）×（ $R_2 + R_3$ ）－（式2）× R_2 を行ない I_2 を消去すると I_1 が求まります。

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)(R_2 + R_3) I_1 - R_2^2 I_2 &= (R_2 + R_3) E_1 - R_2 E_2 \\ (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) I_1 &= (R_2 + R_3) E_1 - R_2 E_2 \end{aligned}$$

$$\therefore I_1 = \frac{(R_2 + R_3) E_1 - R_2 E_2}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)}$$

これを（式1）へ代入すると、 I_2 が求まります。

$$R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I_1 - E_1$$

$$I_2 = \frac{(R_1 + R_2) I_1 - E_1}{R_2}$$

$$I_2 = \frac{(R_1 + R_2) \{ (R_2 + R_3) E_1 - R_2 E_2 \} - E_1 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)}{R_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)}$$

$$I_2 = \frac{R_2^2 E_1 - (R_1 + R_2) R_2 E_2}{R_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)}$$

³² この例の回路の場合、電源と抵抗を左側と右側とで入れ替えても同じ回路となります。（ $R_1 \leftrightarrow R_3$ 、 $E_1 \leftrightarrow E_2$ ）このような回路を、対称な回路と呼びます。対称な回路の場合、電圧や電流が満たす回路も対象になっているはずですから、これを確かめれば計算が正しいかどうかの検算が出来ます。上の式の場合、（ $R_1 \leftrightarrow R_3$ 、 $E_1 \leftrightarrow E_2$ ）をしても計算式は同じになりますから、正しいと言う事が分かります。

$$\therefore I_2 = \frac{R_2 E_1 - (R_1 + R_2) E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

(解法例 2)

図1の問題を、各節に流れ込む、あるいは流れ出す電流を枝ごとに決め、キルヒホッフの法則を解く方法を示します。ここでは、図4のように電流を置くとしします。³³すると、キルヒホッフの閉路方程式と、電流の節点方程式は、次のようになります。ここでは、未知数が三つ存在し、式が3つですから、この連立方程式はやはり解く事ができます。

$$\begin{cases} E_1 - R_1 I_A - R_2 I_C = 0 \\ R_2 I_C + R_3 I_B - E_2 = 0 \\ I_A + I_B - I_C = 0 \end{cases}$$

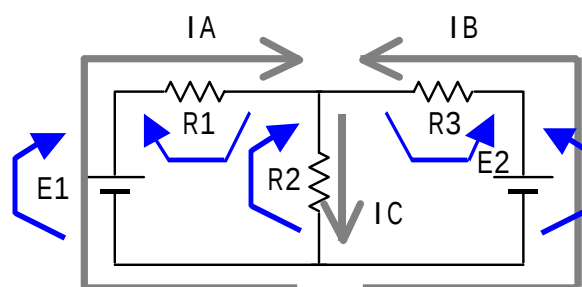


図7 各枝に流れる電流を仮定して求める方法

三つ目の方程式は、 R_2 の上の節点における電流に関する関係を表しています。節点に流れ込む電流を正、流れ出す電流を負としています。全てを足すと、電荷の単位時間あたりの変化分（電流）は、ゼロになります。³⁴この式は、次のように変形すると、実は方法1と同じ方程式となります。

$$\begin{cases} I_A = I_1 \\ I_B = -I_2 \\ I_C = I_A + I_B \end{cases}$$

あとの計算は省略しますが、上のような置き換えをすれば方法1と同じ式になるわけですから、 I_A 、 I_B 、 I_C の三つの未知数に関して順番に消去していけば、電流が求まります。答えは同じになります。

方法1と方法2とを比較すると、同じ計算を結局している事になります。方法1では、 R_2 の電流を R_1 と R_3 を流れる電流を用いておいている事になり、方法2の節点方程式を省力している事に相当します。方法1よりも方法2の方が計算式の意味が分かりやすいと思いますが、節点方程式が

³³ 電流の向きは、この向きでなくても構いません。違う向きに取った場合、符号がマイナスとなり最終的には同じ値になります。

³⁴ 微分のことを習うと、これを発散 (divergence) と呼びます。湧き出しや、すい込みがない限り、流れは連続となりますので、連続の方程式とも呼ばれたりします。

閉路方程式のほかに必要となり、計算が少し増えます。方法 1 の方はループの電流と言う考え方が最初のうちは戸惑うかもしれませんが、分かってしまえば、それ程難しくありません。お薦めするのは、計算間違いの少なそうな方法 1 の方です。方法 1 で述べましたが、閉路の取り方の向きは、時計回りでも反時計回りでも、どちらでも構いません。

<数学の基礎>

2. 9 第11週 (微分)

電気回路でも「微分」と「積分」は、非常に頻繁に使い重要なものです。電気回路を構成するものに、「抵抗」「コイル」「コンデンサ」がありますが、コイルとコンデンサは、まさに微分と積分を電圧や電流に対して行う働きがありますから、微分と積分はどうしても問題を解く時に避けて通ることは出来ないものなのです。ここでは、まず先に微分について考えてみましょう。

微分の定義

x の増加に対する y の増加の比率の極限。y の増加の傾き。接線。数式で表すと次のように表される。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

微分の基本的な公式の例

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{(n-1)} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \quad (2)$$

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (3)$$

$$\frac{d\{f(x)g(x)\}}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx} \quad (4)$$

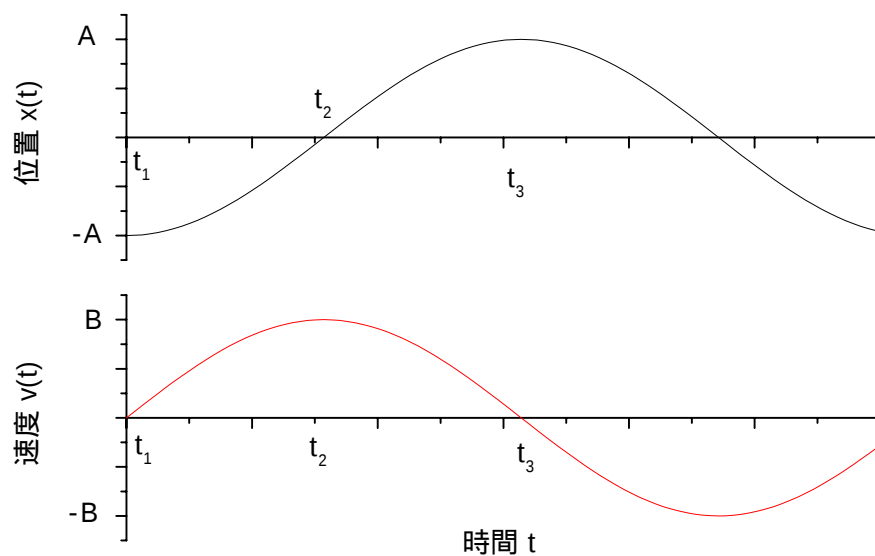
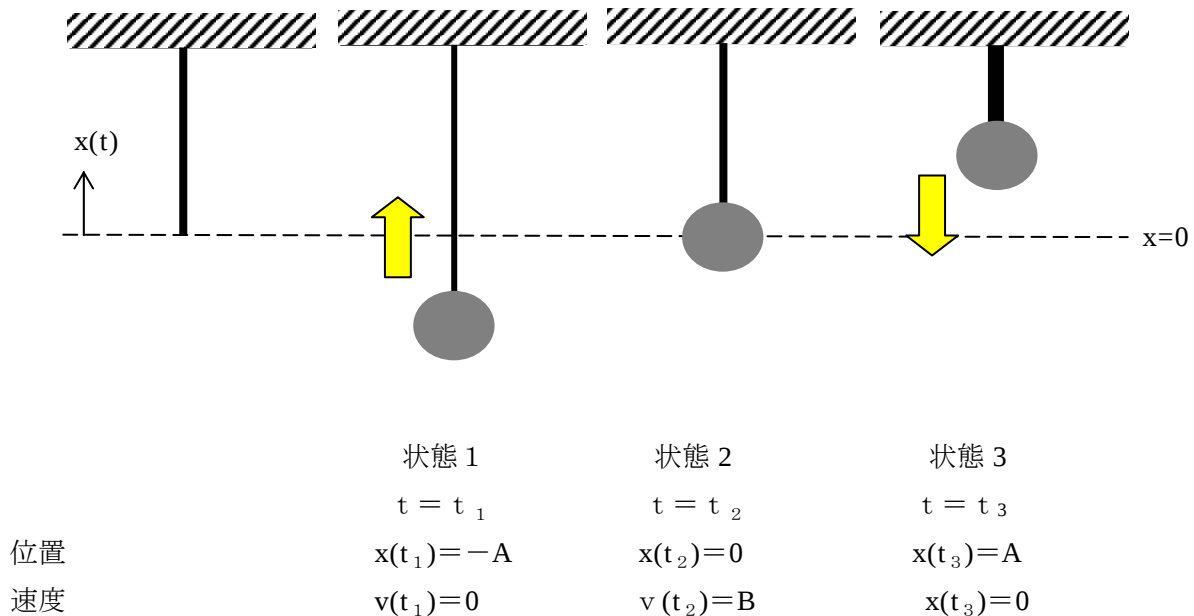
上の4つの式の他にも多くの大切な公式がありますが、電気回路の問題を解く時には、特に上の三つをよく用います。三角関数の微分は、サインとコサインが交互に換わるのですが、コサインを微分する時には、マイナスの符号がつくので注意が必要です。式(3)は、合成微分の公式です。分数の微分の公式が見当たらないような気がしますが、これは式(4)の積の微分の公式と式(1)の指数関数の微分の公式から導けます。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{d}{dx} \left(f(x) g(x)^{-1} \right) = \frac{d}{dx} \left(f(x) g(x)^{-1} \right) = \frac{d}{dx} f(x) g(x)^{-1} + f(x) \frac{d}{dx} g(x)^{-1} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)'}{g(x)^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g(x)'}{g(x)^2} \end{aligned}$$

微分の例：位置と速度

微分の具体的な例として、つるまきバネにおもりがぶら下がり垂直方向に振動し続ける場合について考えます。(このような減衰のない理想的な振動を、「単振動」と呼びます。) おもりの高さ(位

置)と速度の関係を考えてみましょう。おもりがない時のバネの先端の高さを基準とし、 $x=0$ とします。予めおもりを手で引っ張っておき、手を離してからのある時刻 t の時の位置を $x(t)$ 、速度を $v(t)$ とします。位置の最大のずれ幅を A 、速度の最大値を B とすると、次の図のように表されます。



この図から、上の場合では位置 x が $-\cos(t)$ の関数で、速度 v が $\sin(t)$ の関数で表されることがわかります。物理で習ったように、速度は時間に対する位置の変化の割合すなわち位置の微分で表されますからこのようになります。ここで注目すべきは、微分をすると二つの間ではちょうど位相が $\pi/2$ だけずれ、 $\sin$ は $\cos$ に、 $\cos$ は $\sin$ になる点です。(ただし、実際には上例のようにマイナスの符号が $\cos$ を微分した場合にはつきます。)

電気回路における微分： コイルとコンデンサ

電気回路を構成する素子の中にコイルとコンデンサがあります。それらには、電圧 v と電流 i との間に次のような関係式が成り立ちます。

$$v = L \frac{di}{dt}$$
$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

ここで、 L はコイルのインダクタンスと呼ばれる量で、単位はヘンリー[H]を用います。 C はコンデンサの容量と呼ばれる量で、単位はファラッド[F]を用います。 q は、コンデンサに蓄えられた電荷量で、クーロン[c]という単位で表されます。

電気回路では、信号は正弦波を仮定します。つまり $\sin$ 波です。(この場合について考えるのが最も簡単でわかりやすく、そしてこれを応用すればどんな波形に対する答えも単純な計算で求めることができるので便利だから、正弦波について一般的に考えます。)

コイルの電流と電圧の関係

コイルの電流を $\sin$ 波と仮定し、上の関係式を用いると次の式が得られます。

$$i = I \sin(\omega t)$$
$$v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d[I \sin(\omega t)]}{dt} = \omega LI \cos(\omega t) = \omega LI \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

この式から、次のことがわかります。コイルは、電流に ωL の比例係数をかけ、位相を電圧の方が電流より $\pi/2$ だけ進める働きをします。複素平面を用いると位相が $\pi/2$ だけ進むのは、虚数の j をかけたことに対応します。したがって、コイルの電圧は、電流に $j \omega L$ の複素数をかけたものといえます。

$$v = L \frac{di}{dt} = j \omega L i$$

コンデンサの電流と電圧の関係

コイルの場合と同様に、電圧と電流の関係から次の関係が導かれる。

$$\begin{cases} i = C \frac{dv}{dt} \\ v = V \sin(\omega t) \end{cases}$$

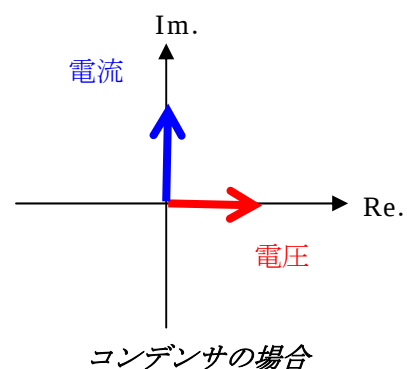
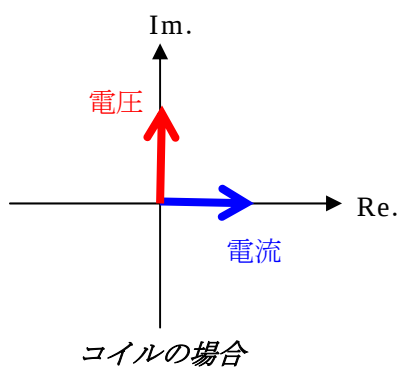
$$i = C \frac{dv}{dt} = C \frac{d[V \sin(\omega t)]}{dt} = \omega CV \cos(\omega t) = \omega CV \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

このことから、コイルの場合とコンデンサの場合とは、ちょうど電圧 v と電流 i を入れ替え、 L を C に対応させたものということが分かります。つまり、コンデンサは、電圧に ωC の比例係数をかけ、位相を電流の方が電圧より $\pi/2$ だけ進める働きをします。複素平面を用いると位相が $\pi/2$ だけ進むのは、虚数の j をかけたことに対応します。したがって、コンデンサの電流は、電流に $j\omega C$ の複素数をかけたものといえます。

$$i = C \frac{dv}{dt} = j\omega Cv$$

複素平面を用いた電流と電圧の関係

上のことを、複素平面にまとめて表すと、次の図のようになります。



積分とは？

積分の詳しい説明は、数学でしっかりと習うと思います。ここでは、電気回路の基礎的な計算を行うために最低限必要な、積分の考え方の基礎だけを紹介します。

「積分とは？」と聞かれると、

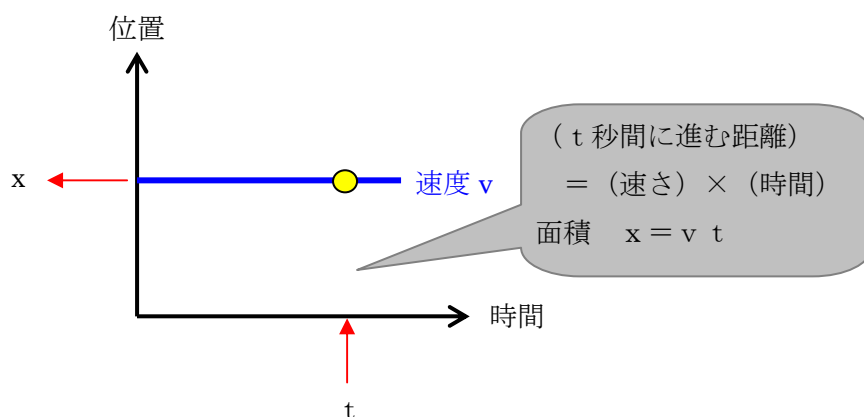
- 1) 「面積を求めること」
- 2) 「微小な変化分を足し合わせること」
- 3) 「微分操作の逆操作」

と答えられると思います。(厳密な定義は、数学の講義を受けて理解してください。私の理解は、うえの三つです。)

面積を求めること

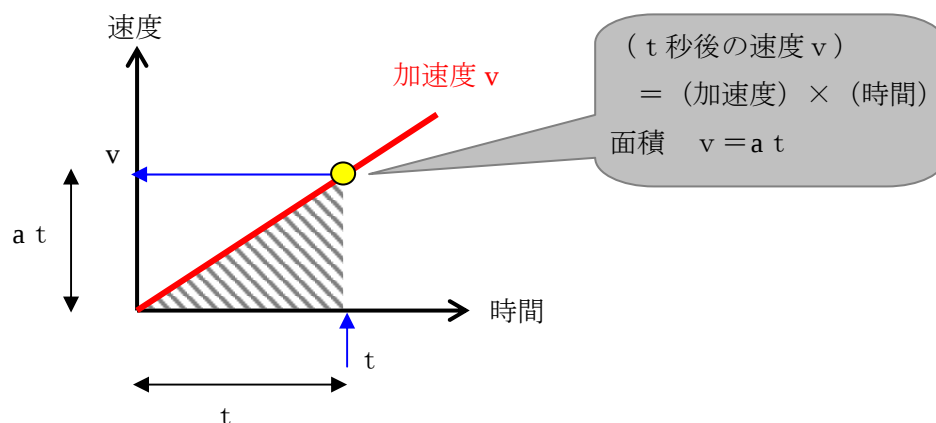
例1) 速度一定 (等速度運動の場合)

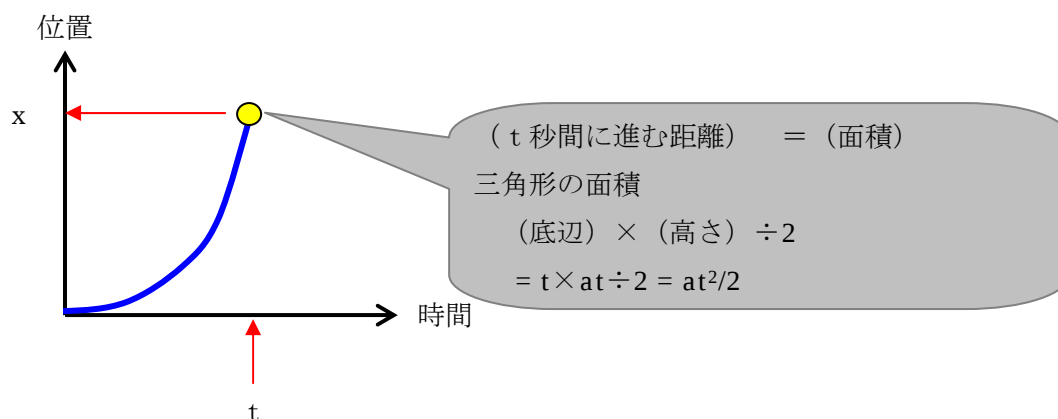
一定速度 $v[\text{m/s}]$ で進む物体が、 $t[\text{s}]$ 後までに移動する距離は幾つ？ (但し、 $t=0$ にいる位置をゼロとして表すとします。)



例2) 加速度一定 (等加速度運動の場合)

一定加速度 $a[\text{m/s}^2]$ で進む物体が、 $t[\text{s}]$ 後の速度 $v[\text{m/s}]$ および移動する距離 $x[\text{m}]$ は幾つ？ (但し、 $t=0$ にいる速度、位置をゼロとして表すとします。)





微小な部分を足し合わせること

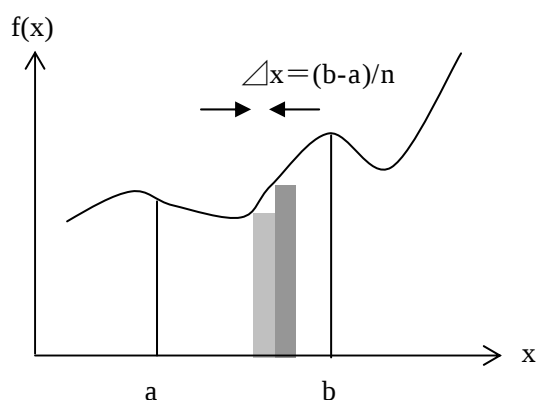
合計を英語では、Sum という言葉で表します。アルファベット (英語) の「S」に対応するギリシャ文字は、「Σ」(シグマ) と記します。

例) 数学の記号の約束では、例えば 1 から 10 までの自然数を足し合わせたものを次のような記号で表します。

$$\sum_{n=1}^{10} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

微小な変化分を数学では、ギリシャ文字の Δ (デルタ) を用いて表します。これは、変化分あるいは差分 (引き算をしたもの) を英語で、difference ということから来ています。アルファベットの「d」は、ギリシャ文字の「Δ」に対応しています。

数学で詳しく習いますが、ある関数 $f(x)$ に対して x の区間 $[a, b]$ を N 個に分割したとします。そうすると下の図のように、この区間の面積は、それぞれの長方形の面積の合計で近似できることが分かります。



この分割数 n を無限に大きくしていけば、長方形の隙間はゼロに近づきます。このような「極限」の考え方を、数学では「lim」と表します。「極限」を英語では、「limit」と表すのでこの最初の 3 文字を使ってこのように表します。

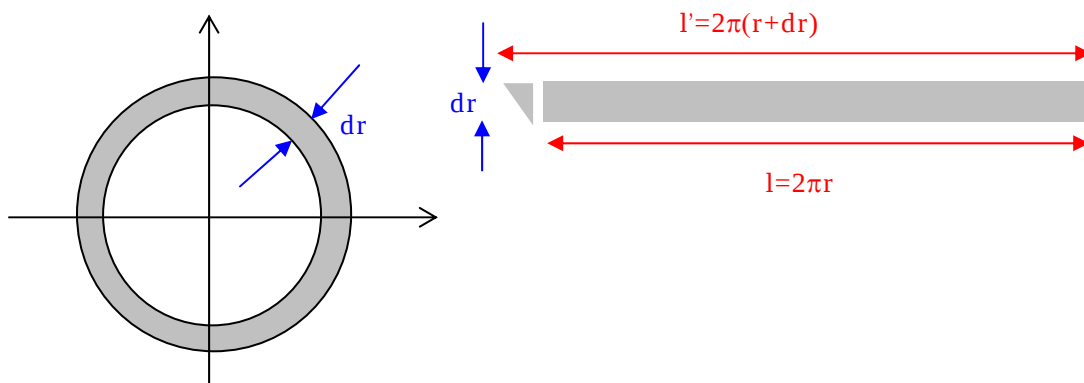
積分のもうひとつの定義は、「無限に細かな長方形を、無限個足し合わせたもの」とも言えます。

これを数学の記号で表すと、次のようになります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left[a + (k-1)\Delta x\right] \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left[a + (k-1)\frac{(b-a)}{n}\right] \frac{(b-a)}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

ここまで読めば、察しの良い皆さんは既にお気づきですね。和の極限を、数学で「積分」と呼び、その記号は「和」を英語で表した「Sum」の頭文字「S」を上下に引っ張り変形させた「∫」であることに気づきませんか？意外と、数学の記号っておもしろいですね。読み方は、「インテグラル」(integral)と読みます。この英語を日本語に直すと、「集積」に対応します。小さな電子回路をたくさん足し合わせ（集積）したものを「IC」と呼びますが、これは「Integrated Circuti」（集積回路）の頭文字です。この集積（積分）に対応するのが integral です。

（積分の例）円の面積



半径 r の円 A と、半径 $(r + dr)$ の円 B を考えます。二つの円にはさまれる部分の面積は、上の図の灰色の領域になります。これを広げると、右のような「リボン」ができます。（円周）は（半径）×（角度：ラジアン）ですから、それぞれの円周を求めることができます。ここで、二つの円の半径の差 dr が非常に小さく、限りなくゼロに近いとします。このようなときには、上の図の左端の部分を削除してもよいと仮定します。（削除してもよいほど dr が小さいとします。）すると、灰色の部分は、長方形となります。

（微小部分の面積） $\div$ （長方形の底辺） $\times$ （長方形の高さ）

$$dS = 2\pi r \times dr$$

この微小部分の面積を、半径が 0 から r まで足し合わせると、全体の円の面積は次の記号で表されます。

$$S = \int_0^r 2\pi r dr = \left[\pi r^2\right]_0^r = \pi r^2$$

これで、円の面積の公式が求まりました。(積分をまだ数学で習っていなければ、上の積分はこのような答えになるんだと今のところは気分を味わっておいてください。既に積分について数学で習った人にはこの計算式が成り立つのは、明らかですネ。)

「積分」というと、「〇〇が十分無視できるほどの△△を無限個足し合わせたもの」ということになり、(なんか騙されていないかな???)と疑いたくなりますが、実はOKです。同様に球の表面積 $S=4\pi r^2$ を積分すると、球の体積 $V=4\pi r^3/3$ にもなります。積分を数学で習った後に、一度自分で確かめてみてください。

微分操作の逆操作

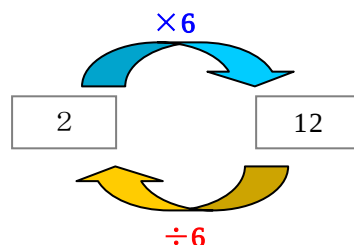
「積分」の三つ目の定義は、「微分操作の逆操作です。」ある操作 A の逆操作 B というのは、この逆操作 B を、ある操作 A に対して行くと、「何もしなかったことになる」ような操作です。あるいは、「元に戻す操作」とも言えます。

逆操作の例： 「かけ算」と「わり算」

$$2 \times 6 \Rightarrow 12$$

$$12 \div 6 \Rightarrow 2$$

$$\therefore \boxed{2 \times 6 \div 6 \Rightarrow 2}$$



つまり、

「微分」して「積分」すると、「何もしないことと同じ」

になります。あるいは、

「積分」したものに「微分」とすると、元に戻る

こととも言えます。

逆操作の例： 「円の面積」の微分 $\Rightarrow$ 「円周」

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d(\pi r^2)}{dr} = 2\pi r = l$$

これは、上のように明らかに証明できます。先ほどの「微小な部分を足し合わせること」での証明の、まったく「逆操作」つまり「微分」操作になります。同様に、球の体積を微分すると球の表面積になります。

< 電気回路の基礎 2 >

2. 11 第13週 インピーダンス

インピーダンスとは

2.4 節で既に述べたように電気の世界では、「抵抗」という言葉をよく耳にします。「抵抗器」は、英語で「resistor」（レジスタ）と書きます。この単語の元の言葉は、英語の動詞 **resist**（レジスト）で日本語の意味は「抵抗する、反抗する」です。電流を流そうと電位差（電圧）を加える（印加する）と、「抵抗」が“邪魔”をします。この言葉と同じ意味を表す別の英語の単語には、**impede**（インピード）があります。この単語の意味は、「〈…を〉妨げる、じゃまする」です。電流を流そうとする電圧に対する“じゃまをするもの”を、「impedance」（インピーダンス）と呼びます。

インピーダンスと抵抗は、基本的には同じ働きをします。（ここで“基本的には”とあえて言っていることに注意が必要です。）抵抗がどの程度「じゃまをする」働きをするかをあわす単位は、オーム（Ω）で表します。中学校で既に習っていますよね。「オームの法則」で有名な、あの「オーム」です。抵抗をR[Ω]、電圧をE[V]、電流をI[A]とすると、次のような簡単な関係で一般には表されます。³⁵

$$R = \frac{E}{I} \quad (\text{オームの法則})$$

「コイル」「コンデンサ」のはたらき： 積分作用

上で述べたことから、抵抗の“仲間”であるインピーダンスも「電圧を電流で割ったもの」であると予想されます。

「抵抗」とは何かを具体的に言うと、例えば電気ヒータがあります。「**抵抗とは、電気のエネルギーを、熱のエネルギーに変換するもの**」と呼ぶことが出来ます。抵抗の他の電気回路で重要な素子には、「コイル」と「コンデンサ」があります。それぞれの働きを一言で表すと、「**コイルとは、電気のエネルギーを、磁界のエネルギーに変換するもの**」「**コンデンサとは、電気のエネルギーを、電界のエネルギーに変換するもの**」と呼ぶことが出来ます。ここで言う“電気のエネルギー”とは、電子が持つエネルギーを表します。また、“磁界”や“電界”の「界」という文字は、英語の「field」（フィールド）と表され、別の日本語では、「場」とも呼ばれます。「磁界」と「磁場」とは、基本的には同じものを現し、英語を日本語に訳すときに違う日本語になったに過ぎないと思ってもらって良いと思います。

コイルやコンデンサの抵抗との本質的な違いは、エネルギーを「蓄える」ことが出来ることです。

³⁵ 一般に抵抗の話をするときには暗黙のうちに、直流を考えていることが多いことです。抵抗は、時間に対して電圧が変化する「交流」に対しても、当然“じゃまをするもの”として立派にはたります。

例えば、熱は何もしなければ空気中に消失してしまいますが、コイルやコンデンサの場合には、理想的な状態（抵抗がゼロ）ではエネルギーは「出入り」するだけ、すなわちエネルギーが形を変えただけで保存されます。身近な例では、カメラのフラッシュを思い出してください。乾電池で豆電球を点灯させても「とろ火」でしかありませんが、「充電」するとエネルギーが蓄積され、それを一気に放出すると「閃光（フラッシュ）」となります。エネルギーを蓄えることが出来ることを利用しているのです。

この「蓄積する」とは、「足し合わせる事」ことと同じことです。これを数学の記号で表せば、「積分」と呼ばれるものになります。2.9 節の（微分）の項で述べたように、次の関係で表されます。

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (\text{コイル } L \text{ の電圧と電流の関係})$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (\text{コンデンサ } C \text{ の電流と電圧の関係})$$

2.10 節で述べたように「積分は微分の逆操作」ですから、上の微分で表される関係式は「さかさま」な表現である積分で表すと次のような関係で表されます。

$$i = \frac{1}{L} \int v \, dt \quad (\text{コイル } L \text{ の電圧と電流の関係})$$

$$v = \frac{1}{C} \int i \, dt \quad (\text{コンデンサ } C \text{ の電圧と電流の関係})$$

複素数で電圧と電流の位相を表すことは、難しい計算が簡単にできるようになるので非常に便利です。これから繰り返し用います。³⁶コイルやコンデンサは、電圧と電流の位相を変化させます。一方、エネルギーを蓄えることが出来ない抵抗は、積分作用がありませんから当然、電圧と電流の位相差はありません。

交流インピーダンスとは

「インピーダンスとは、電圧を電流で割ったもの」という事は、既に述べました。ここで、電圧や電流というのは、特に直流と断っていませんので、直流と交流のどちらでも構いません。交流の

³⁶ 厳密な表現で言えば、「微分方程式」と呼ばれる式の計算を、複素平面にLaplace変換することで、「代数方程式」の四則演算に持ち込み計算後、逆Laplace変換し元の時間座標系に戻すことに対応します。このことを必ずしも理解していなくても、電気回路の実際の計算では、「まずは解けること」が重要になってきます。厳密に理解することは、高度な数学を理解しなければならないと思われます。初めて勉強する方は、あまり難しく考えすぎないほうが、まずは良いでしょう。

電圧と、それを印加した時に流れる電流から求めたものを、交流インピーダンスと呼びます。あるいは、単にインピーダンスと呼びます。³⁷

今まで述べたように、コイルやコンデンサは電圧と電流の間の位相を変化させる働きがあります。微分や積分の働きをするからでした。これらを扱うのは、複素数が大変便利だということも繰り返し述べました。

位相の異なる交流電圧と電流の比から求められるインピーダンスも、やはり複素数で表されます。ただし注意が必要なのは、実際に「意味がある」「エネルギーとして取り出すことができる」のは、この複素数の「実部」(実数部分)のみです。では「虚部」(虚数部分)は何も意味がないのかというと、既に述べたように微分や積分(いそうの進みや遅れ)を“記号”として扱うことで、正しい答えを導き出す為に“陰の立役者”として大いに働いています。³⁸

微分と積分の複素表現

コイル L とコンデンサ C の電圧と電流の関係をまとめると次のようになります。

コイル L の電圧と電流の関係

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (\text{微分を用いた表現})$$

$$i = \frac{1}{L} \int v \, dt \quad (\text{積分を用いた表現})$$

コンデンサ C の電流と電圧の関係

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (\text{微分を用いた表現})$$

$$v = \frac{1}{C} \int i \, dt \quad (\text{積分を用いた表現})$$

微分と積分を複素数で表すと次のようになります。³⁹

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\Leftrightarrow j\omega \\ \int dt &\Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

³⁷ 「直流インピーダンス」という言葉は、ほとんど用いられません。直流の電圧と電流の比から求められるのは、単に「抵抗」と呼ばれるからです。

³⁸ 計算途中では省略は出来ませんが、最後の最後に答えを紙に書くときに姿を消すので「影の立役者」と言えます。詳しくは、数学の微分方程式を習ったあとで理解できます。

³⁹ 正弦波(sin波)に対する応答に対しては、このように複素数を用いることが出来ますが、一般的な交流信号に対しては、このような簡単な形では解けません。詳しくは、数学の「フーリエ級数」について勉強したら分かります。

2.12 直列等価回路と並列等価回路

等価回路とは

実際に目の前にある回路などを、あたかも同じ働きをする別の回路に置き換えて考えると便利ことがあります。例えば、乾電池は化学反応(酸化、還元)を利用したものです。あたかも一定電圧を出力する定電圧源と内部にある大きさの抵抗が直列に接続されたものと考え、電気回路の振る舞いを計算するときに非常に便利です。実際には存在しないけれども、その価値としては同じ(等しい)、つまり等価な回路のことを等価回路と呼びます。

直列と並列

例えば、図1のような回路が実際に存在したと仮定します。この回路全体のインピーダンス Z を計算で求めたとします。インピーダンスは複素数であらわされますので、 $Z=A+jB$ の形に変形できるはず。複素数が分数などで表されているときには、分母の複素数は必ず共役な複素数を分母と分子にかけることにより必ず分母を実数にしなければいけません。分子のみが実部と虚部で表現されるときに、元の複素数は最終的に実部 A と虚部 B で表されます。もし $Z=A+jB$ という形で実際の電気回路のインピーダンスが表現されれば、この電気回路は等価的に、 $A[\Omega]$ の抵抗と、位相が変化する $B[\Omega]$ の成分からなるといえます。 B が正であれば位相が進むと言い、負であれば遅れると言います。この直列回路の形で表した等価回路は、図2のようになります。

電流の「流れにくさ」をあらわすには、インピーダンス Z を用います。反対に電流の「流れやすさ」をあらわすにはアドミタンス Y を用います。「流れにくさ」と「流れやすさ」は互いに逆の関係にあります、つまり流れにくさが大きいとは、流れやすさが小さいということになります。従って、 $Y=1/Z$ という関係が成り立ちます。

Z が複素数であらわされるとき、その逆数 Y も当然複素数で表すことができます。ただし実部と虚部はすぐには求められません。 Z で述べたように分母の複素数を実数に変形するように分母分子に共役な複素数をかけなければなりません。この処理により $Y=c+jd$ という形に変形できます。インピーダンス Z の単位はオーム $[\Omega]$ ですが、アドミタンスの単位はジーメンズ $[S]$ です。変形された Y から、この並列回路で表した等価回路では、 $c[S]$ の抵抗の逆数(これをコンダクタンスと呼びます)と位相を変化させる $d[S]$ が並列に接続されているようにみなすことができます。(図3)

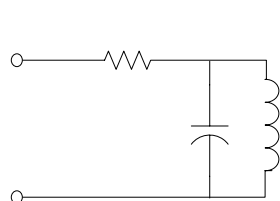


図1 実際の回路の例

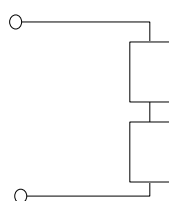


図2 直列等価回路

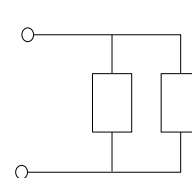


図3 並列等価回路

直列回路と並列回路の変換

実際の回路の等価回路として、直列と並列の二つを考えることができることを上で述べました。すると、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{(実際の回路)} \equiv \text{(直列等価回路)} \\ \text{(実際の回路)} \equiv \text{(並列等価回路)} \end{array} \right. \\ \therefore \text{(直列等価回路)} \equiv \text{(並列等価回路)} \end{aligned}$$

となります。直列等価回路が与えられれば、並列等価回路へ変換することができますし、逆に並列等価回路が与えられれば直列等価回路に変換できます。図4のように各素子の値を決めたとしても、次の関係式が成り立ちます。

一般的に、インピーダンスあるいはアドミタンスを求める場合、このような実部と虚部に分かれる形式まで式を変形することを要求されます。これは、等価回路で表した場合、位相が変化しない抵抗成分と位相を変化させるリアクタンス成分（X）がどのような形で表現されることを知る事が実際には有用だからです。

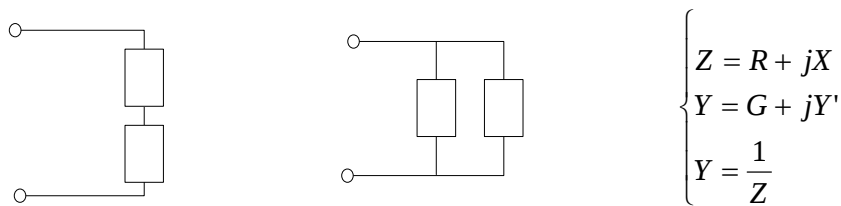


図4 直列等価回路と並列等価回路の変換

直列から並列への変換

RとXが与えられている時に、GとY'をそれぞれRとXで表せばよいことになります。

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{R + jX} = \frac{(R - jX)}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 - (j)^2 X^2} = \frac{R - jX}{R^2 - (-1)X^2} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \\ &= \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \left(-\frac{X}{R^2 + X^2} \right) = G + Y' \end{aligned}$$

複素数の実部と虚部を比較することにより、次の式を得ます。

$$\begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} \\ Y' = -\frac{X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

これで、直列回路が与えられれば、それらの値を用いて並列回路に変換できることがわかります。

並列から直列への変換

並列回路が与えられ、それを直列回路に変換するのも同様の計算を行なえば求めることができます。

$$Z = \frac{1}{G + jY'} = \frac{(G - jY')}{(G + jY')(G - jY')} = \frac{G - jY'}{G^2 + Y'^2} = R + jX$$

$$\begin{cases} R = \frac{G}{G^2 + Y'^2} \\ Y' = -\frac{Y'}{G^2 + Y'^2} \end{cases}$$

【例題】

以下の問題の各図の合成インピーダンスの計算（復習）
角速度（角周波数）は、全て ω [rad/s] とします。

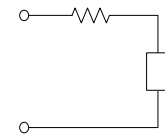
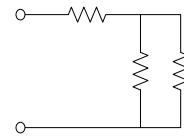
（例題 1） 抵抗の素子の値が全て等しい場合

この問題では、全ての抵抗は R [Ω] であり大きさが等しい。
右図では、並列接続された部分の合成インピーダンスをまず求める。
その合成インピーダンスを Z_1 とすると、残りの抵抗と Z_1 との
合成インピーダンスを求めれば、それが全体のインピーダンスとなる。

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}$$

$$Z_1 = \frac{R}{2}$$

$$Z = R + Z_1 = R + \frac{R}{2} = 1.5R \quad [\Omega]$$



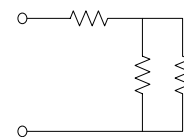
（例題 2） 抵抗の素子の値が等しくない場合

図 2 の問題は、図 1 の問題と基本的には、考え方の違いはありません。
但し、分数の計算における「注意力」がかけると、計算間違いをして
しまいます。上の問題と同様に解くと、

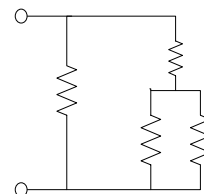
$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} \frac{(R_2 R_3)}{(R_2 R_3)} = \frac{R_2 R_3}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)(R_2 R_3)} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$Z = R_1 + Z_1 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad [\Omega]$$



最後の答えの表現は、この問題では抵抗成分しか素子がありませんので、位相を変化させる虚部がなく、実部のみですので分数を取って通分しなくても良いと思います。



(例題 3) 抵抗の素子の値が等しくない場合：その 2

今度は、上の例題に抵抗が一つ増えました。考え方は同じです。

$$Z_1 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}, \quad Z_2 = R_2 + Z_1 = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$Z = \frac{R_1 Z_2}{R_1 + Z_2} = \frac{R_1 \left[\frac{R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right]}{R_1 + \left[\frac{R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right]} = \frac{R_1 \left[\frac{R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right] (R_3 + R_4)}{R_1 + \left[\frac{R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right] (R_3 + R_4)}$$

$$= \frac{R_1 [R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4]}{R_1(R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4} = \frac{R_1 [R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4]}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4} \quad [\Omega]$$

【コラム： 分数の書き方】

計算間違いをする場合の原因の一つに、「自分で書いた文字が読めない。」「自分で書いた式を勘違いする。」があります。『分数の中の分数』を書く時には、注意が必要です。

例 1： $(1+2 \div 3) \div (4 \div 3)$ の計算

これを間違える人はいないと思います。括弧の中を先に計算し、全体を計算すればよいですね。では、同じものを分数で表したらどうでしょう？

$$1 + \frac{2}{3} \div \frac{4}{3} = ? \quad \text{これなら問題なく解けますか??}$$

例 2： $(2 \div 3) \div (4 \div 3)$ の計算

これは、どうでしょうか？括弧を使い、一行でかかれてあれば、どこから先に手をつければいいのか分かります。ただし、分数で表すと、わかりにくくなりそうです。

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = ? \quad \text{とかかかれると、アレ??} \quad \text{どの割り算(分数)から計算するのでしょうか?}$$

ぱっと見ただけでは、 $2 \div (3 \div 4 \div 3)$ や $(2 \div 3 \div 4) \div 3$ 特別が付きません。与えられた問題であることを、はっきりわかるように書くためには、例えば、次のように書いてはいかがでしょうか？

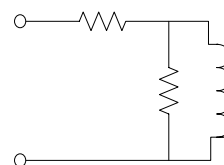
$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \quad \text{あるいは,} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} =$$

実際に問題を解く時には、右のように分数の横棒を長く書くのをしっかり書かないと、書いた本人でさえ「見間違い」⇒「計算間違い」となり得ます。左の例のように、わかりにくいときには、やや面倒ですが、間違えるよりはましですから括弧でくくる習慣を身につけておくと思います。

(例題 4) R と L の回路

単位が異なる物理量は、合計を求めたりする事は出来ません。

(例：重さ+時間=??) 抵抗 $R[\Omega]$ とコイル $L[H]$ は、単位が異なります。角速度が ω であるときには、コイル $L[H]$ を $j\omega L[\Omega]$ のインピーダンスと見なすことが出来ます。それさえわかれば、右図の問題は、図 1 の問題と全く同じ解き方で答えを求められます。



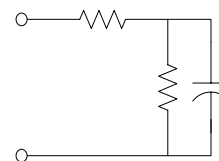
$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L}$$

$$\begin{aligned} Z &= R_1 + Z_1 = R_1 + \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} = R_1 + \frac{j\omega L R_2 (R_2 - j\omega L)}{(R_2 + j\omega L)(R_2 - j\omega L)} = R_1 + \frac{(\omega L)^2 R_2 + j\omega L R_2^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} \\ &= R_1 + \frac{(\omega L)^2 R_2}{R_2^2 + (\omega L)^2} + j \frac{\omega L R_2^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} \quad [\Omega] \end{aligned}$$

だんだんと、計算が「ややこしく」なってきました。大丈夫です。落ち着いて計算すればちゃんと解けます。

(例題 5) R と C の回路

コンデンサ $C[F]$ をインピーダンスに変換すると、 $\frac{1}{j\omega C} [\Omega]$ になります。後は、同様に計算すれば良いだけです。



$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C} = \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2}$$

$$\begin{aligned} Z &= R_1 + Z_1 = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2} = R_1 + \frac{R_2(1 - j\omega CR_2)}{(1 + j\omega CR_2)(1 - j\omega CR_2)} = R_1 + \frac{R_2(1 - j\omega CR_2)}{1 + (\omega CR_2)^2} \\ &= R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2} - j \frac{\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2} \quad [\Omega] \end{aligned}$$