令和７年度専攻科入学学力検査問題

（数学）

(試験時間　９０分)

注 意

1. 問題用紙は指示があるまで開かないこと．
2. 問題用紙は表紙を除いて５枚です．
3. 解答用紙は５枚です．予備解答用紙を１枚含みます．
4. 問題 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 全問を解答して下さい．$\boxed{1}$は答のみが採点対象，$\boxed{2}$～$\boxed{4}$は一部の問題を除き計算過程も採点対象です．
5. 解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと．解答欄が不足する場合には裏面ではなく指定の予備解答用紙に記入すること．

鈴 鹿 工 業 高 等 専 門 学 校

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．答のみを解答欄に記入せよ．

(1) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$ を求めよ．

(3) 空間において，平面 $x-2y+3z+7=0$ に関して原点 O と対称な点の座標を求めよ．

(4) y を変数 x の微分可能な関数であるとする．次の微分方程式と初期条件をみたす関数 y を求めよ．答は「$y=$」の形で答えること．

$$y' - y^2 + y = 0 \quad , \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

(5) $3^{50} \times 7^{100}$ は何桁の整数か．$\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ を用いて求めよ．

(6) 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 - 3axy + y^3$ の極値を全て求めよ（a は正の定数とする）．ただし，極値を与える (x, y) の値と（極大か極小かも含めて）極値の両方を答えること．

(7) 次の 2 重積分（累次積分）の値を積分順序を変更することにより計算せよ．

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \frac{1}{\sqrt{x^3+9}}\, dx\, dy$$

(8) 複素平面において，複素数 $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 3 + 2i$ の（正の最小の）偏角をそれぞれ θ_1, θ_2 とする（$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位）．$\theta_1 - \theta_2$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の漸化式と初項で定まる 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える．以下の問に答えよ．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 4b_n \end{cases} \qquad a_1 = 1,\ b_1 = 2$$

(1) a_2, b_2 を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ．

(3) (2) の A について，A^{n-1} を求めよ．ただし n は自然数とする．

(4) 一般項 a_n, b_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a は正の定数とする．アステロイド

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

で囲まれる図形を x 軸の周りに回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ．

$\boxed{4}$ 実数 x に対して $x=0$ を含む近傍で次のように定義された関数 $f(x)$ を考える.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x} & (x\neq 0\text{ のとき})\\ 0 & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$$

(1) $\sin x$ の無限マクローリン展開を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能か？もし微分可能ならば, 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(3) $x\neq 0$ に対して導関数 $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ を求め, それにより極限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$ を求めよ.

受験番号	

令和７年度専攻科入学学力検査解答用紙 (数学)

総合得点	

$\boxed{1}$

答のみを解答欄に記入すること.

(1)

-7

(2)

$\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{e^x}{2}+C=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}+C$ (C は積分定数)

(3)

$(-1,2,-3)$

(4)

$y=\frac{1}{e^x+1}$

(5)

109 桁

(6)

$(x,y)=(a,a)$ のとき, 極小値 $-a^3$

(7)

2

(8)

$\theta_1-\theta_2=\frac{3}{4}\pi$

$\boxed{1}$ 得点	

$\boxed{1}$ (1)	

$\boxed{1}$ (2)	

$\boxed{1}$ (3)	

$\boxed{1}$ (4)	

$\boxed{1}$ (5)	

$\boxed{1}$ (6)	

$\boxed{1}$ (7)	

$\boxed{1}$ (8)	

受験番号	

$\boxed{2}$ (1)

$a_2 = -7,\ b_2 = -5$

(2)

$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

(3)

A の固有値を求めると，$\lambda = 2, -1$.
固有ベクトルを求めて A を対角化すると，
$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ として，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とできる.
よって，

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{n-1} P^{-1} \\ &= \cdots = \begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n & -2^n - 2\cdot(-1)^n \\ 2^{n-1} + (-1)^n & -2^{n-1} - 2\cdot(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n & -2^n - 2\cdot(-1)^n \\ 2^{n-1} + (-1)^n & -2^{n-1} - 2\cdot(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \cdots = \begin{pmatrix} -2^n - 3\cdot(-1)^n \\ -2^{n-1} - 3\cdot(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より，

$$a_n = -2^n - 3\cdot(-1)^n\ , \qquad b_n = -2^{n-1} - 3\cdot(-1)^n.$$

$\boxed{2}$ 得点	

$\boxed{2}$ (1)	

$\boxed{2}$ (2)	

$\boxed{2}$ (3)	

$\boxed{2}$ (4)	

受験番号	

$\boxed{3}$

$\boxed{3}$ 得点	

図形の対称性から，回転体の体積は $V = 2\int_0^a \pi y^2\,dx$ である．

$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ を用いて変数 t の積分に置き換えて計算すると，

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \pi(a\sin^3 t)^2 \cdot 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)\,dt \\
&= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\,dt \\
&= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t)\,dt \\
&= 6\pi a^3 \left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{32}{105}\pi a^3
\end{aligned}
$$

受験番号	

4 得点	

$\boxed{4}$ (1)

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\cdots$$

4 (1)	

(2)

微分係数の定義より $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sin h} - \frac{1}{h} - 0\right)$ であるが, この極限値は (1) のマクローリン展開を用いて次のように計算される：

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right)}{x\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)}{x^3 + O(x^5)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

よって $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で, $f'(0) = \frac{1}{6}$.

別解：上の極限値を, ロピタルの定理等を用いて計算してももちろんよい.

4 (2)	

(3)

$x \neq 0$ に対して $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}$. よってマクローリン展開を用いて

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2\cos x + \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + O(x^4)\right) + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right)^2}{x^2\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots\right) + \left(x^2 - \frac{2}{3!}x \cdot x^3 + \cdots\right)}{x^2\left(x^2 - \frac{2}{3!}x \cdot x^3 + \cdots\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2!} - \frac{2}{3!}\right) + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

4 (3)	