

令和 8 年度専攻科入学学力検査問題

(数学)

(試験時間 90 分)

注 意

1. 問題用紙は指示があるまで開かないこと。
2. 問題用紙は表紙を除いて 5 枚です。
3. 解答用紙は 5 枚です。予備解答用紙を 1 枚含みます。
4. 問題 1 ～ 4 全問解答して下さい。 1 は答のみが採点対象，2 ～ 4 は一部の問題を除き計算過程も採点対象です。
5. 解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと。
解答欄が不足する場合には裏面ではなく指定の予備解答用紙に記入すること。

鈴 鹿 工 業 高 等 専 門 学 校

1 次の問いに答えよ. 答のみを解答欄に記入せよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ の極限値を y とするとき, y の値を小数第 3 位を四捨五入して答えよ.

(2) 2 つのベクトル $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ.

(3) 次の 2 重積分 (累次積分) の値を積分順序を変更することで求めよ.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx dy$$

(4) $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ を $r \sin(x + \alpha)$ の形にせよ. ただし, $r > 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$ とする.

- (5) 関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ の $x = 4$ のまわりのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ. (つまり, $f(x)$ を最も良く近似する 2 次多項式を求めよ.) 剰余項 (誤差項) は求めなくてよい.

- (6) 2 次正方行列 A, B についての次の命題のうち, 常に正しいものを全て選びなさい.

- ア. $AB = O$ (O は零行列) ならば, $A = O$ または $B = O$ である.
- イ. A, B の階数 (rank) がともに 1 ならば, 積 AB の階数 (rank) も 1 である.
- ウ. A, B の階数 (rank) がともに 2 ならば, 積 AB の階数 (rank) も 2 である.
- エ. A, B がともに正則行列ならば, 和 $A + B$ も正則行列である.

- (7) ド・モアブルの公式を用いて, $(\sqrt{3} - i)^{-5}$ を $a + bi$ の形で答えよ. ただし, i は虚数単位とする.

- (8) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ で表される xy 平面の 1 次変換について, 原点を通る直線のうち, その像が原点だけになるものを求めよ.

2 xyz 空間において, 平面 $x + 2y + z = 0$ に関する対称変換を f とし, f を表す 3 次正方行列を A とする (A は $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列である).

(1) 固有値と固有ベクトルの意味を考えれば, 平面の法線ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は行列 A の固有ベクトルになる. $\vec{v}$ に対応する固有値を答えよ.

(2) 行列 A の他の固有値 (2 重解である) と対応する固有ベクトル (固有空間) を求めよ.

(3) 行列 A を求めよ.

3 曲面 $f(x, y) = 5x^2 + 8xy - y^2$ について、次の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ は原点で極値をとらないことを説明せよ.

(2) 条件 $x^2 + y^2 = 1$ における関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.
ただし、極値をとることを前提としてよい.

(3) 曲線 $f(x, y) = 3$ 上の点 $(2, -1)$ における接線の方程式を求めよ.

4 次の微分方程式の一般解を求めたい.

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3 \log x \quad \text{—— (I)}$$

ただし, y は x の 2 回微分可能な関数であるとし, y'' は y の第 2 次導関数を表すものとする.

(1) 補助方程式 (斉次方程式)

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad \text{—— (II)}$$

の解で, べき乗関数 $y = x^m$ (m は定数) の形のものを 1 つ求めよ.

(2) (II) は線形微分方程式であるから, $y = Cx^m$ (C は任意定数) は全て (II) の解になる. そこで (I) の一般解を (定数変化法を用いて) $y = u(x)x^m$ とおいてみる (m は (1) で求めたもの). (I) に代入して, 未知関数 $u(x)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(3) (2) で求めた微分方程式を次のように変形するとき, $\boxed{\text{ア}}$ に入る式を答えよ.

$$(u'(x)\boxed{\text{ア}})' = \frac{d}{dx}(u'(x)\boxed{\text{ア}}) = \log x$$

(4) (3) の微分方程式を解いて関数 $u(x)$ を求め, それにより (I) の一般解 y を求めよ.

令和8年度専攻科入学学力検査解答用紙(数学)

総合得点	

1

(1) 2.72

(2) $\vec{e} = \pm \frac{1}{3}(2, -2, 1)$

(3) $\frac{52}{9}$

(4) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

(5) $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x - 4) + \frac{3}{256}(x - 4)^2 + R_3$

(6) ウ

(7) $-\frac{\sqrt{3}}{64} + \frac{1}{64}i$

(8) $y = -3x$

1	得点
1	(1)
1	(2)
1	(3)
1	(4)
1	(5)
1	(6)
1	(7)
1	(8)

2

- (1) 固有値と固有ベクトルの意味を考えれば, 法線ベクトルは対称変換によって反転するので, $A\vec{v} = -\vec{v}$ が成り立ち, 対応する固有値は -1 である.

2 得点

- (2) 固有値と固有ベクトルの意味を考えれば, 平面内のベクトルは対称変換 f によって全く動かない (固有値は 1) . つまり, 原点 O を通る平面内の任意のベクトル (任意の点の位置ベクトル) $\vec{x}$ に対し $A\vec{x} = 1\vec{x}$ が成り立つ.

よって (1) で扱ったものの他の固有値は 1 (2 重解) で, 対応する固有空間は, 平面

$$\text{全体} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y + z = 0 \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ である.}$$

2 (1)

2 (2)

- (3) (1),(2) の結果をまとめると, 固有ベクトルを並べた行列を P と置いて以下が成り立つ.

$$AP = A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ここで P の逆行列を余因子行列等を用いて求めると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} {}^T \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

となるから

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2 (3)

3

- (1) $z = f(x, y)$ とおく. xz 平面と yz 平面の切り口を調べる.
 $y = 0$ とすると, $z = 5x^2$ となり, 下に凸の 2 次関数である.
 $x = 0$ とすると, $z = -y^2$ となり, 上に凸の 2 次関数である.
よって, $z = f(x, y)$ は鞍型 (くらがた) の立体だから, 原点で極値をとらない.

- (2) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ とおく.
 $f_x = 10x + 8y, f_y = 8x - 2y, g_x = 2x, g_y = 2y$
ラグランジュの乗数法により, $\frac{10x + 8y}{2x} = \frac{8x - 2y}{2y}$
これを計算して, $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$
 $(2x + y)(x - 2y) = 0$ より, $y = -2x, x = 2y$
(i) $y = -2x$ のとき, $x^2 + (-2x)^2 = 1$ より, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, y = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$
 $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 5 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{-2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5 - 16 - 4}{5} = -3$
(ii) $x = 2y$ のとき, $(2y)^2 + y^2 = 1$ より, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$
 $f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5 \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{20 + 16 - 1}{5} = 7$
よって, 極大値 7 $(x, y) = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (複号同順)
極小値 -3 $(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (複号同順)

- (3) 曲線 $f(x, y) = 3$ は $5x^2 + 8xy - y^2 = 3$ である.
 $g(x, y) = f(x, y) - 3 = 0, g_y(2, -1) \neq 0$ より陰関数定理が使えて,
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{10x + 8y}{8x - 2y}, \quad \frac{dy}{dx}\bigg|_{(2, -1)} = -\frac{10 - 4}{8 + 1} = -\frac{2}{3}$
接線の方程式は, $y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)$
 $2x + 3y - 1 = 0$

3 得点

3 (1)

3 (2)

3 (3)

4

- (1) $y = x^m$ とおくと, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ だから (II) に代入すると

$$\{m(m-1) - 3m + 4\}x^m = (m-2)^2x^m = 0$$

が成り立てばよい. よって $y = x^2$ が解になる.

- (2) $y = u(x)x^2$ とおくと $y' = u'x^2 + 2ux$, $y'' = u''x^2 + 4xu' + 2u$.

(I) に代入すると, $u''x^4 + 4u'x^3 + 2ux^2 - 3u'x^3 - 6ux^2 + 4ux^2 = x^3 \log x$.
整理して

$$x^4u'' + x^3u' = x^3 \log x.$$

- (3) (2) の答えの両辺を x^3 で割ると

$$xu'' + u' = \log x$$

となるが, よく見るとこれは以下と同じ:

$$(u'x)' = \frac{d}{dx}(u'x) = \log x.$$

つまり, に入る式は である.

- (4) (3) の微分方程式の両辺を積分すると

$$u'x = \int \log x \, dx = x \log x - x + C. \quad (C \text{ は積分定数})$$

両辺を x で割ると

$$u' = \log x - 1 + \frac{C}{x}.$$

最後にもう一度積分すると

$$u = x \log x - x - x + C \log x + D. \quad (D \text{ は積分定数})$$

よって $y = ux^2 = x^3 \log x - 2x^3 + Cx^2 \log x + Dx^2$.

4 得点

4 (1)

4 (2)

4 (3)

4 (4)

令和8年度専攻科入学学力検査問題（数学）

出題意図

1

基礎的な内容について、ネイピア数の定義、垂直な単位ベクトルの求め方、2重積分の積分順序の変更方法、三角関数の合成方法、テイラー展開の求め方、2次正方行列の性質、ド・モアブルの公式の使い方、1次変換の像の求め方が身についているかをはかる問題である。

2

線形代数の分野について、線形変換と固有値・固有ベクトルの定義と意味が理解できているか、また行列の分割や逆行列の計算方法が身についているかをはかる問題である。

3

偏微分の分野について、極値の有無を判定する方法、条件付き極値の求め方、曲線上の点における接線の方程式の求め方が身についているかをはかる問題である。

4

線形微分方程式の分野について、解空間がどのような形になるか理解できているか、解法としては重要な定数変化法が身についているかをはかる問題である。