

平成31年度専攻科入学者選抜学力検査問題

(数学)

(試験時間 90分)

注意

1. 問題用紙は指示があるまで開かないこと。
2. 問題用紙4枚です。
3. 本来の解答用紙は4枚ですが、予備の解答用紙を1枚用意してあります。
4. 問題(1)～(4)全問解答して下さい。
5. (4)の空所補充を除き計算過程も採点対象です。
6. 解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと。
解答欄が不足する場合には裏面ではなく指定の予備解答用紙に記入すること。

鈴鹿工業高等専門学校

(1) 次の問に答えよ.

1) 不等式 $x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ.

2) 等式

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

が恒等式となるような実定数 a と b を求めよ.

3) 無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ. (必要なら 2) の結果を用いよ.)

4) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ の $x=0$ のまわりでの 3 次の近似多項式 (マクローリン多項式) を求めよ.

5) 4) で求めた近似多項式に $\frac{1}{2}$ を代入することによって $\log \frac{3}{2}$ の近似値を求めると, 誤差は $\frac{1}{50}$ 未満になることを示せ.

(4) で求めた近似多項式を $P(x)$ と表すと, 任意の $0 < x < 1$ に対して

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4, \quad 0 < c < x$$

となる c が存在するという事実は使ってよい.)

(2) 次の問に答えよ.

1) 平面上の辺の長さが1の正方形 ABCD に対して, 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ を求めよ.

2) 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が表す xy 平面上の一次変換によって, 直線 $x+y+1=0$ がうつされる図形の方程式を求めよ.

3) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値を全て求めよ.

4) 3) の行列 A に対して, $D = P^{-1}AP$ を満足するような対角行列 D と正則行列 P を一組求めよ.

(3) 次の問に答えよ.

1) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = xy^2e^{-x}$ の一般解を求めよ.

2) 自重が十分に軽く質量の無視できるバネが天井からつるされている. バネ先端にはおもりをかける場所があり, その点を原点とし下向きに座標を取って考える. バネに質量 m のおもりをつけ, そのおもりの時刻 t における位置の座標を $y = y(t)$ とおくと, バネの伸び縮みが, ある範囲内なら微分方程式

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky + mg \quad (g: \text{重力加速度}, k: \text{正の定数})$$

が近似的に成立するとして以下の問に答えよ.

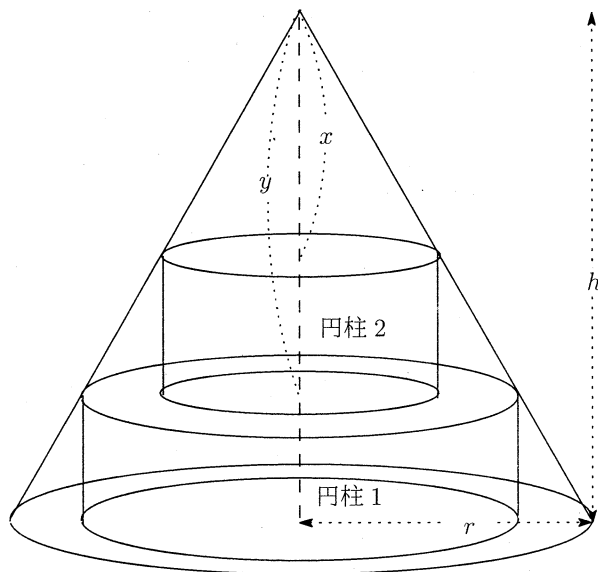
(i) この微分方程式の一般解を求めよ.

(ii) 初期条件 $y(0) = a, y'(0) = 0$ での解 $y(t)$ を求めよ.

(4) 次の問に答えよ。

- 1) 下図のように平面上に底面が半径 r の円で高さが h の円錐を考え、その中心軸を同心に円柱 1 の上に円柱 2 を重ねた立体を考え円錐に内接するように配置する。すなわち円柱 1 の底面は円錐底面に含まれ、円柱 1 上面は円錐側面に内接しつつ円柱 2 底面を含み、円柱 2 上面は円錐に内接している。このとき以下の問 (i), (ii) に答えよ。

- (i) 円錐の頂点から円柱 2 上面までの距離を x 、頂点から円柱 1 上面までの距離を y として、円柱 1 と円柱 2 の体積の和を V とおくと V は xy 平面の $0 < x < y < h$ を満たす領域で定義された x, y の 3 次関数になる。その 3 次式を求めよ。



- (ii) 前問 (i) の V を最大とする x, y を求め、その場合の円柱 1 と円柱 2 の高さの比を求めよ。ただし、 V の値が極大であることは示さなくて良いものとする。

- 2) xyz 空間内の xy 平面上の単位円とその内部を底面とし高さが H の z 軸を中心とする円柱を考え、円柱上面の点 $(1, 0, H)$ と y 軸を含む平面を α とする。 α より下にある円柱の部分の体積 V を次の累次積分により計算する。そのために必要な空欄にふさわしい数式を解答欄に記入せよ。

$$V = \int_0^1 \int_{\boxed{\text{(イ)}}}^{\boxed{\text{(ア)}}} \boxed{\text{(ウ)}} dy dx = \int_{-1}^1 \int_{\boxed{\text{(オ)}}}^{\boxed{\text{(エ)}}} \boxed{\text{(ウ)}} dx dy = \boxed{\text{(カ)}}$$

(ア) ~ (カ) の順で解答用紙の指定欄に適切な式を示すこと。