２０２０年度専攻科入学者選抜学力検査問題

（数学）

(試験時間　９０分)

注 意

1. 問題用紙は指示があるまで開かないこと.
2. 問題用紙は表紙を除いて４枚です.
3. 解答用紙は４枚ですが，予備の解答用紙を２枚用意してあります.
4. 問題 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 全問解答して下さい．一部の問題を除き計算過程も採点対象です.
5. 解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと.
解答欄が不足する場合には裏面ではなく指定の予備解答用紙に記入すること.

鈴鹿工業高等専門学校

$\boxed{1}$ この問題では複素数平面の知識を問う．

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$（$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位，θ は実数とする）の一つの証明を与えたい．ここでは，指数関数の定義は $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$（$n$ は自然数）を採用する．

(1) （ア）〜（オ）に当てはまる数式を，下の選択肢 (A)〜(L) から選び記号で答えよ．

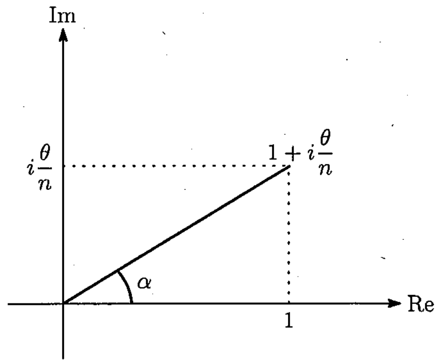
(2) 以下の **(II)** 式の極限値を計算せよ．

$e^{i\theta} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n$ の値を，その偏角と絶対値に分けて調べる．以下簡単のため $\theta > 0$ とする．

まず偏角について調べるため，一般的に $\alpha > 0$ に対し $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$ が成り立つことに着目する（証明しなくてよい）．この不等式を，複素数 $1+\frac{i\theta}{n}$ の偏角 $\alpha = \arg\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)$ に対して適用すると（$\arg(z)$ は，複素数 z の (正の最小の) 偏角 (argument) を表す）

$$\boxed{（ア）\quad\quad} < \arg\left(1+\frac{i\theta}{n}\right) < \boxed{（イ）\quad\quad}$$

となる．



続いて，複素数 $1+\frac{i\theta}{n}$ の n 乗を考えることで

$$\boxed{（ウ）\quad\quad} < \arg\left\{\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n\right\} < \frac{\theta}{n}\cdot n$$

となるので，この式で $n\to\infty$ とすれば，はさみうちの原理により次が得られる．

$$\arg(e^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n = \boxed{（エ）\quad\quad} \qquad \text{—— (I)}$$

最後に $e^{i\theta}$ の絶対値について調べるため，絶対値と極限の記号を交換すると，次が得られる．

$$|e^{i\theta}| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\boxed{（オ）\quad\quad} \qquad \text{—— (II)}$$

以上をまとめれば，$e^{i\theta}$ の偏角は **(I)**，絶対値は **(II)**（**(2)** の答え）となり，オイラーの公式が証明できる．

（ア）〜（オ）の選択肢

(A)	$\sqrt{1+\frac{\theta^2}{n^2}}$	(B)	$\sqrt{1+\frac{\theta^2}{n^2}}^{\,n}$	(C)	$\frac{\theta}{\sqrt{n^2-\theta^2}}$	(D)	$\frac{\theta}{\sqrt{n^2+\theta^2}}$
(E)	$\frac{n}{\sqrt{n^2+\theta^2}}$	(F)	$\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^n$	(G)	θ	(H)	$\frac{\theta}{n}$
(I)	$\left(\frac{\theta}{n}\right)^n$	(J)	$\frac{n\theta}{\sqrt{n^2+\theta^2}}$	(K)	$\sqrt{1-\frac{\theta^2}{n^2}}^{\,n}$	(L)	$\left(\frac{\theta}{\sqrt{n^2+\theta^2}}\right)^n$

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ．

(1) 整式 $1-x^5$ を（有理数係数の範囲で）２つの因数の積に因数分解せよ．
また，正方行列 A が $A^5=O$ を満たすとき，$E-A$ は正則行列であることを示し，その逆行列 $(E-A)^{-1}$ を A と E の多項式で表せ．ただし，<u>O は零行列，E は単位行列である</u>．

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 2a & 1\\ a & 2 & b\\ 4 & -b & 5\end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を持つとき，a, b の値および対応する固有値を求めよ．

(3) 未知数 x, y, z についての連立方程式 $\begin{cases}x+y+a^2z=a\\ ax+y+az=a\\ x+ay+az=a\end{cases}$ （a は定数）の解がそれぞれ次のようになるときの，定数 a についての条件を答えよ．ただし，答は複数（無限）個の場合もあり得る．

・無数の解を持つのは $\boxed{\text{(ア)}\qquad\qquad}$ のとき，

・解を持たないのは $\boxed{\text{(イ)}\qquad\qquad}$ のとき，

・ただひとつの解を持つのは $\boxed{\text{(ウ)}\qquad\qquad}$ のときである．

$\boxed{3}$ 次の問に答えよ．

(1) 次の 1 階の微分方程式の一般解を求めよ．

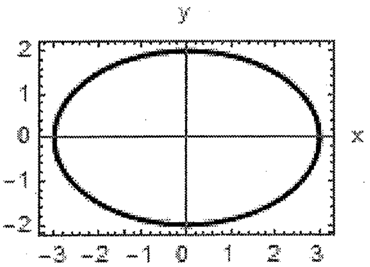
$$\left(e^{(y^2)} - \cos x \log y\right) dx + \left(2xye^{(y^2)} - \frac{\sin x}{y}\right) dy = 0 \quad .$$

(2) 次の 2 階の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，y は x の微分可能な関数であるとし，y' は y の導関数を表すものとする．

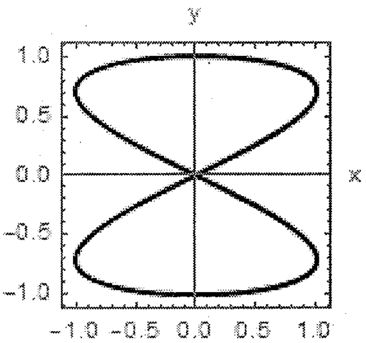
$$xy'' - 2y' = 4\log x \quad .$$

$\boxed{4}$ 次の問に答えよ．

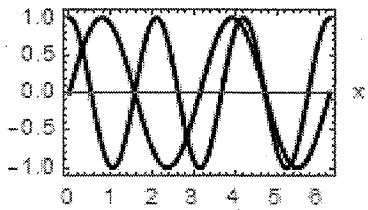
(1) 媒介変数 t を用いて表される xy 平面内の曲線 $x = \cos 3t,\ y = \sin 2t\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ は次の (A)〜(E) のうちどれか．正しいものを選べ (答のみが採点対象)．



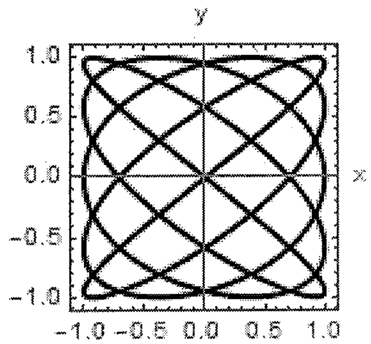
(A)



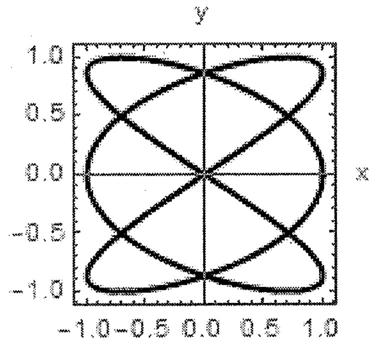
(B)



(C)



(D)



(E)

(2) 2 変数関数 $f(x, y) = 2x^3 - 6xy - 12x - 3y^2$ に関して以下の問に答えよ．

(i) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる点 (x, y) を全て求めよ．

(ii) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(3) D を $y = x$ と $y = \sqrt{x}$ で囲まれた領域とする．このとき，以下の重積分の値を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{y}{x^2+1}\, dxdy$$