令和４年度専攻科入学者選抜学力検査問題

（数学）

(試験時間　９０分)

注　意

1.　問題用紙は指示があるまで開かないこと．

2.　問題用紙は表紙を含み５枚です．

3.　解答用紙は４枚ですが，予備の解答用紙を１枚用意してあります．

4.　問題 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 全問解答して下さい．一部の問題を除き計算過程も採点対象です．

5.　解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと．

6.　解答は解答欄に, 証明は証明欄に記すこと．計算過程の欄が不足する場合には裏面ではなく指定の予備解答用紙に記入すること．(予備解答用紙利用などと計算過程の欄に記述すること)

鈴 鹿 工 業 高 等 専 門 学 校

$\boxed{1}$ 次の問に答えよ.

(1) $-\pi < \theta < \pi$ を満たす角 θ について, $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とおく. $\cos\theta$ を t の式で表し, これを証明せよ.

(2) 放物線 $2x + y^2 = 1$ に対し, 次の設問 **(i)**, **(ii)**, **(iii)** に答えよ.

(i) 放物線上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ.

(ii) この放物線を極方程式で表したものを以下の選択肢から選び, 記号で答えよ.

選択肢

ア. $r = \sin\theta$, イ. $r = \dfrac{1}{\sin\theta}$, ウ. $r = \cos\theta$, エ. $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$,

オ. $r = \dfrac{1}{2\cos\theta}$, カ. $r = \dfrac{1}{2 - \sin\theta}$, キ. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$, ク. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

(iii) **(ii)** において $0 \leqq \theta < \pi$ を満たす角 θ に対する放物線上の点を $\mathrm{P}(\theta)$ とする. 放物線と, 線分 $\mathrm{OP}(0)$ と線分 $\mathrm{OP}(\theta)$ に挟まれた部分の面積 S を θ の式で表せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問に答えよ.

(1) 次の行列式を計算せよ. ただし, 可能な限り因数分解した形で答えること.

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

(2) ベクトル $\overrightarrow{a}$ のベクトル $\overrightarrow{b}$ への正射影として, 適切なベクトルを次の選択肢から選び, 記号で答えよ.

選択肢.

ア. $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}\overrightarrow{b}$　　イ. $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\overrightarrow{b}$

ウ. $\dfrac{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}\overrightarrow{b}$　　エ. $\dfrac{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}\overrightarrow{b}$

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ について, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような適切な正則行列 P を定め, 対角行列 $P^{-1}AP$ を決定せよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, y は x の微分可能な関数であるとし, y' は y の導関数を表すものとする.

$$xy' - y = \frac{1}{x} \quad .$$

(2) 次の微分方程式を解くために, 以下の問に答えよ. ただし, y は x の 2 回微分可能な関数であるとし, y' は y の導関数を表すものとする.

$$xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

(i) 微分方程式 $(*)$ は $y = e^{ax}$ の形の特殊解をもつ. 定数 a として適切な実数を答えよ.

(ii) 前問 **(i)** で得た特殊解を用いて, $y = e^{ax} \cdot u(x)$ とおくと, 微分方程式 $(*)$ を $u(x)$ に関する微分方程式に変形することができる. この u の x に関する微分方程式を導け.

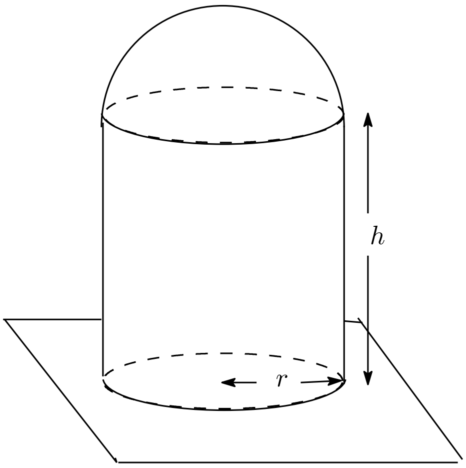
(iii) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

$\boxed{4}$ 次の問に答えよ.

(1) 平原にサイロ (※) を作る. その形は円筒状の側壁上部に同じ半径を持つ中空の半球状の屋根がついた形で, 半球状屋根を作るための $1[\mathrm{m}^2]$ あたりのコストは側壁の円筒部分を作るための $1[\mathrm{m}^2]$ あたりのコストの 3 倍であるという. 側壁と屋根を作る建設費の合計が一定という条件下でなるべく容積の大きいサイロを建設するには円筒状側壁部の高さ h と半径と r との比率をどのようにしたらよいかを求めよ. ただし, 極値の候補が最大値になることを認めて良い.

なお, サイロ内部の床面のコストや投入及び取り出し口のためのコストは無視できるとし, 側壁や屋根の厚み等から生じる理論値との違いも無視して良いとする.

※ 牧場等にある内部に牧草を蓄え飼料とするための建造物



(2) 正の数 x, y に対し二変数関数 $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)$ を考える. 以下の設問 **(i)**, **(ii)** に答えよ.

(i) f の全微分 df を求めよ.

(ii) 関数 $\dfrac{\log x + \log 2y}{2}$ の値と $f(x,y)$ の大小関係について正しい不等式を下の選択肢の中から選び解答欄に記せ. また, その証明と等号が成立する条件を記述せよ.

選択肢

ア. $\log\left(\dfrac{x+2y}{2}\right) \geqq \dfrac{\log x + \log 2y}{2}$, イ. $\log\left(\dfrac{x+2y}{2}\right) \leqq \dfrac{\log x + \log 2y}{2}$.

.