

令和5年度専攻科入学学力検査問題

(数学)

(試験時間 90分)

注意

1. 問題用紙は指示があるまで開かないこと。
2. 問題用紙は表紙を除いて5枚です。
3. 解答用紙は5枚です。予備解答用紙を1枚含みます。
4. 問題 1 ~ 4 全問解答して下さい。 1 は答のみが採点対象、2 ~ 4 は一部の問題を除き計算過程も採点対象です。
5. 解答用紙の総合得点欄および得点欄には記入しないこと。
解答欄が不足する場合には裏面ではなく指定の予備解答用紙に記入すること。

鈴鹿工業高等専門学校

1 次の問いに答えよ。答のみを解答欄に記入せよ。

(1) 方程式 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ を $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で解け。

(2) $(1-i)^{18}$ の値を求めよ。

(3) 定積分 $\int_2^3 \frac{1}{x^2+x-2} dx$ の値を求めよ。

(4) 次の微分方程式を解け。最終的な答は $y = f(x)$ の形で答えること。

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x$$

- (5) 関数 $f(x) = \sin x$ について、 $x = \frac{\pi}{4}$ のまわりのテイラー展開を 0 でない最初の 4 項まで求めよ。

- (6) 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の階数 (rank) が 3 になるための定数 a の条件を求めよ。

- (7) 2変数関数 $z = f(x, y) = \sqrt{50 - x^2 - y^2}$ について、グラフの曲面 (半球面) 上の点 $(3, 4, 5)$ における接平面の方程式を求めよ。

- (8) 次の 2重積分 (累次積分) の値を積分順序を変更することで求めよ。

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx$$

2 正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ について、問いに答えよ (a は定数, E は単位行列とする)。

(1) A を $A = T + N$, $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aE$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と2つの和に分解する。

自然数 m, k に対して, T^m, N^2 および N^k ($k \geq 3$) を求めよ。

(2) 二項定理

$$A^n = (T + N)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k T^{n-k} N^k \quad ({}_n C_k \text{ は組合せの記号})$$

を用いて, 自然数 n に対し A^n (の成分表示) を求めよ。

3 次の問いに答えよ.

(1) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \log |x|$ を調べよ.

(2) 関数 $y = x \log |x|$ の増減, 極値を調べ, グラフをかけ. (凹凸は調べなくてよい)

4 次の微分方程式の一般解を求めたい.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x} \quad \text{--- (I)}$$

ただし, y は x の 2 回微分可能な関数であるとし, y'' は y の第 2 次導関数を表すものとする.

(1) 補助方程式 (斉次方程式)

$$y'' + y = 0 \quad \text{--- (II)}$$

の一般解 $y = A \cos x + B \sin x$ を参考にして, (I) の一般解を (定数変化法を用いて) $y = u(x) \cos x$ とおいてみる. (I) に代入して, 関数 $u(x)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(2) (1) の微分方程式を次のように変形するとき, $\boxed{\text{ア}}$ に入る式を答えよ.

$$(u'(x) \boxed{\text{ア}})' = \frac{d}{dx} (u'(x) \boxed{\text{ア}}) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(3) (2) の微分方程式を解いて関数 $u(x)$ を求め, それにより (I) の一般解 y を求めよ.